BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng Chủ biên) - VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM KHẮC BAN - TẠ MÂN

HÌNH HỌC

NÂNG CAO

11

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NHỮNG ĐIỀU HỌC SINH CẦN CHÚ Ý KHI SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA

1. Khi nghe thầy cô giáo giảng bài, luôn luôn có SGK trước mặt. Tuy nhiên không viết, vẽ thêm vào SGK để năm sau các bạn khác có thể dùng được.

2. Về trình bày, sách giáo khoa có hai mảng : mảng chính và mảng phụ.

Mảng chính gồm các định nghĩa, định lí, tính chất,... và thường được đóng khung hoặc có đường viền ở mép trái. Mảng này được in lùi vào trong.

3. Khi gặp **Câu hỏi** [?] , cần phải suy nghĩ, trả lời nhanh và đúng.

4. Khi gặp **Hoạt động**, phải dùng bút và giấy nháp để thực hiện những yêu cầu mà hoạt động đòi hỏi.

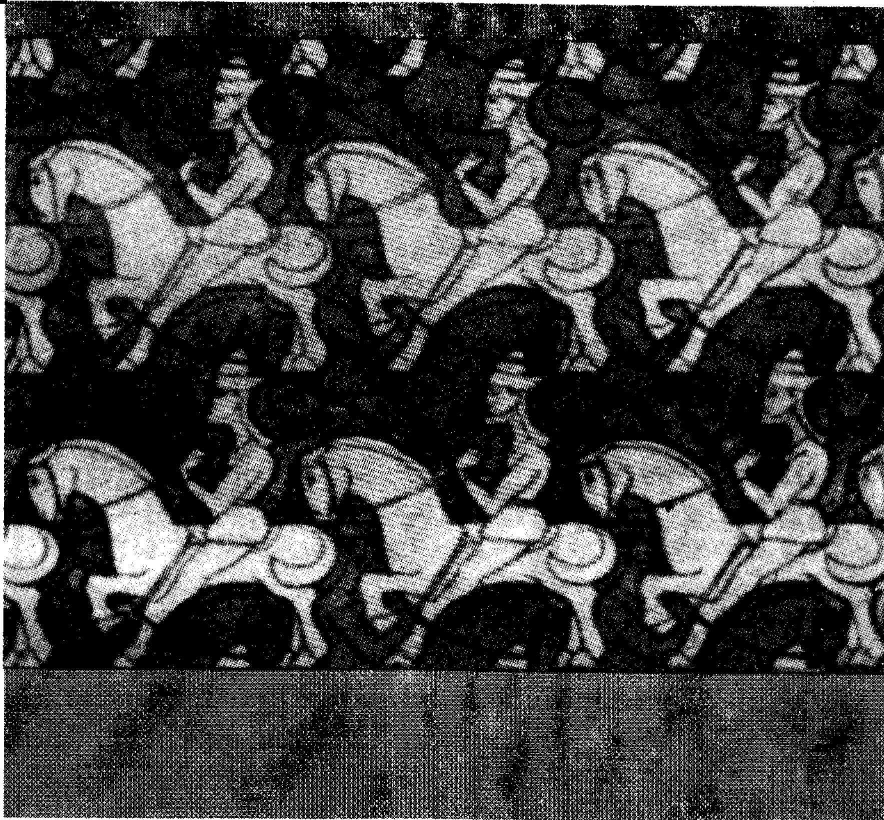
Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục - Bộ Giáo dục và Đào tạo.

692-2006/CXB/536-1530/GD

Mã số : NH102M7

CHƯƠNG I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG



Bức tranh của hoạ sĩ Hà Lan Ét-se (M.C. Escher) gồm những hình bằng nhau mô tả các chiến binh trên lưng ngựa. Các hình này phủ kín mặt phẳng. Hai chiến binh và ngựa cùng màu (trắng hoặc đen) tương ứng với nhau qua một phép tịnh tiến. Hai chiến binh và ngựa khác màu thì tương ứng với nhau qua một phép đối xứng trục và tiếp theo là một phép tịnh tiến.

Nghệ thuật dùng những hình bằng nhau để lấp đầy mặt phẳng được phát triển mạnh mẽ vào thế kỉ XIII ở nước I-ta-li-a.

Chương này nói về các phép dời hình và đồng dạng trong mặt phẳng. Học sinh sẽ làm quen với phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quay, phép vị tự, ... và sẽ hiểu thế nào là hai hình bằng nhau, thế nào là hai hình đồng dạng một cách tổng quát.

Học sinh cần nắm được định nghĩa của các phép nói trên và có thể áp dụng chúng để giải các bài toán không quá phức tạp.

§1 MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

1. Phép biến hình

Trong Đại số, ta đã biết một khái niệm quan trọng : khái niệm "hàm số".

Ta nhắc lại : Nếu có một quy tắc để với mỗi số $x \in \mathbb{R}$, xác định được một số duy nhất $y \in \mathbb{R}$ thì quy tắc đó gọi là *một hàm số xác định trên tập số thực* $\mathbb{R}$.

Bây giờ, trong mệnh đề trên ta thay *số thực* bằng *điểm thuộc mặt phẳng* thì ta được khái niệm về phép biến hình trong mặt phẳng. Cụ thể là

Nếu có một quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy thì quy tắc đó gọi là *một phép biến hình (trong mặt phẳng).*

Vậy ta có

ĐỊNH NGHĨA

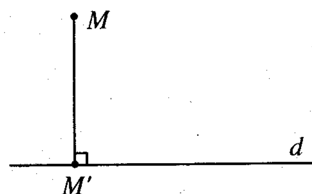
Phép biến hình *(trong mặt phẳng) là một quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là* ***ảnh*** *của điểm M qua phép biến hình đó.*

2. Các ví dụ

Ví dụ 1

Cho đường thẳng d. Với mỗi điểm M, ta xác định M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên d (h.1) thì ta được một phép biến hình.

Phép biến hình này gọi là ***phép chiếu (vuông góc) lên đường thẳng d***.

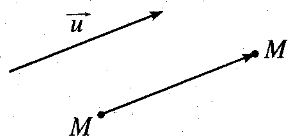


Hình 1

Ví dụ 2

Cho vectơ $\vec{u}$, với mỗi điểm M ta xác định điểm M' theo quy tắc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ (h.2).

Như vậy ta cũng có một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là ***phép tịnh tiến theo vectơ*** $\vec{u}$.



Hình 2

Ví dụ 3

Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' trùng với M thì ta cũng được một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là ***phép đồng nhất***.

3. Kí hiệu và thuật ngữ

Nếu ta kí hiệu một phép biến hình nào đó là F và điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F thì ta viết $M' = F(M)$, hoặc $F(M) = M'$. Khi đó, ta còn nói ***phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'***.

Với mỗi hình $\mathscr{H}$, ta gọi hình $\mathscr{H}'$ gồm các điểm $M' = F(M)$, trong đó $M \in \mathscr{H}$, là ***ảnh của $\mathscr{H}$ qua phép biến hình F***, và viết $\mathscr{H}' = F(\mathscr{H})$.



1) Hãy vẽ một đường tròn và một đường thẳng d rồi vẽ ảnh của đường tròn qua phép chiếu lên d.

2) Hãy vẽ một vectơ $\vec{u}$ và một tam giác ABC rồi lần lượt vẽ ảnh A', B', C' của các đỉnh A, B, C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Có nhận xét gì về hai tam giác ABC và $A'B'C'$?

§2 PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

1. Định nghĩa phép tịnh tiến

Ta nhắc lại định nghĩa phép tịnh tiến đã nói ở Ví dụ 2 §1 :

> ***Phép tịnh tiến*** *theo vectơ $\vec{u}$ là một phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho* $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ thường được kí hiệu là T hoặc $T_{\vec{u}}$. Vectơ $\vec{u}$ được gọi là ***vectơ tịnh tiến***.



? *Phép đồng nhất có phải là phép tịnh tiến không ?*

2. Các tính chất của phép tịnh tiến



1

Giả sử phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N'. Có nhận xét gì về hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{M'N'}$? So sánh độ dài hai vectơ đó.

Vậy ta có định lí

ĐỊNH LÍ 1

> *Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì M'N' = MN.*

Người ta diễn tả tính chất trên của phép tịnh tiến là : *Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.*

ĐỊNH LÍ 2

> *Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.*

Chứng minh

Giả sử phép tịnh tiến biến ba điểm A, B, C thành ba điểm A', B', C'. Theo định lí 1, ta có $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ và $A'C' = AC$.

Nếu A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C thì $AB + BC = AC$. Do đó ta cũng có $A'B' + B'C' = A'C'$, tức là A', B', C' thẳng hàng, trong đó B' nằm giữa A' và C'. □

Từ định lí trên, ta dễ dàng suy ra hệ quả sau đây

HỆ QUẢ

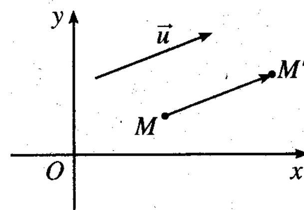
> *Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.*

3. Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

Biết toạ độ của $\vec{u}$ là $(a\,;\,b)$. Giả sử điểm $M(x\,;\,y)$ biến thành điểm $M'(x'\,;\,y')$ (h.3).

Khi đó ta có $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$



Hình 3

Công thức trên goi là *biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{u}(a\ ;\ b)$.



2

Hãy giải thích vì sao có công thức trên.

4. Ứng dụng của phép tịnh tiến

Bài toán 1

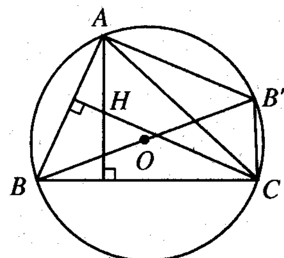
Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O ; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Giải

Nếu BC là đường kính thì trực tâm H của tam giác ABC chính là A. Vậy H nằm trên đường tròn cố định $(O\ ;\ R)$.

Nếu BC không phải là đường kính, vẽ đường kính BB' của đường tròn (h.4).

Dễ thấy rằng nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ (trên hình 4, điều đó suy từ nhận xét tứ giác $AHCB'$ là hình bình hành).

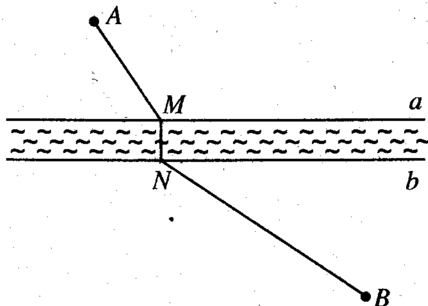


Hình 4

Như vậy, phép tịnh tiến theo vectơ cố định $\overrightarrow{B'C}$ biến điểm A thành điểm H. Do đó, khi A thay đổi trên $(O\ ;\ R)$ thì trực tâm H luôn nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn $(O\ ;\ R)$ qua phép tịnh tiến nói trên. □

Bài toán 2

Hai thôn nằm ở hai vị trí A và B cách nhau một con sông (xem rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song) (h.5). Người ta dự định xây một chiếc cầu MN bắc qua sông (cố nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) và làm hai đoạn đường thẳng từ A đến M và từ B đến N. Hãy xác định vị trí chiếc cầu MN sao cho AM + BN ngắn nhất.



Hình 5

Nhận xét

Bài toán sẽ rất đơn giản nếu con sông rất hẹp, hẹp đến mức hai bờ sông a và b xem như trùng với nhau.



3

Hãy giải bài toán trong trường hợp đặc biệt đó.

Trường hợp tổng quát (h.5) có thể đưa về trường hợp trên bằng một phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{MN}$ để a trùng b. Khi đó điểm A biến thành điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ và do đó $A'N = AM$.



4

Từ gợi ý đó, hãy giải bài toán trong trường hợp tổng quát.

5. Phép dời hình

Không phải chỉ có phép tịnh tiến "không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm" mà còn nhiều phép biến hình khác cũng có tính chất đó (tính chất này còn được gọi là tính chất *bảo toàn khoảng cách* giữa hai điểm). Người ta gọi các phép biến hình như vậy là phép dời hình.

ĐỊNH NGHĨA

> ***Phép dời hình*** *là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.*

Chú ý rằng các tính chất đã nêu của phép tịnh tiến được chứng minh chỉ dựa vào tính chất "*không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm*". Bởi vậy, các phép dời hình cũng có những tính chất đó. Cụ thể ta có

ĐỊNH LÍ

> *Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.*

Câu hỏi và bài tập

1. Qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì : d trùng d' ? d song song với d' ? d cắt d' ?

2. Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.

3. Cho hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và $T_{\vec{v}}$. Với điểm M bất kì, $T_{\vec{u}}$ biến M thành điểm M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành điểm M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến M thành M'' là một phép tịnh tiến.

4. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x\,;y)$ thành điểm $M'(x'\,;y')$, trong đó

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

a) Cho hai điểm $M(x_1\,;y_1)$, $N(x_2\,;y_2)$ và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F. Hãy tìm toạ độ của M' và N'.

b) Tính khoảng cách d giữa M và N ; khoảng cách d' giữa M' và N'.

c) Phép F có phải là phép dời hình hay không ?

d) Khi $\alpha = 0$, chứng tỏ rằng F là phép tịnh tiến.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây :

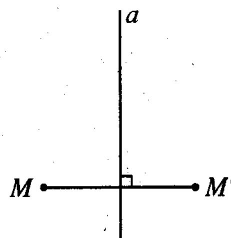
– Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm $M(x\,;y)$ thành điểm $M'(y\,;-x)$;

– Phép biến hình F_2 biến mỗi điểm $M(x\,;y)$ thành điểm $M'(2x\,;y)$.

Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình ?

§3 PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

1. Định nghĩa phép đối xứng trục



Hình 6

Ta nhắc lại : *Điểm M' gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng a nếu a là đường trung trực của đoạn thẳng MM' (h.6). Nếu M nằm trên a thì ta xem M đối xứng với chính nó qua a.*

Phép đối xứng qua đường thẳng a được định nghĩa như sau

ĐỊNH NGHĨA 1

> ***Phép đối xứng qua đường thẳng*** *a là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua a.*

Kí hiệu và thuật ngữ

Phép đối xứng qua đường thẳng a thường được kí hiệu là $Đ_a$. Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi đơn giản là ***phép đối xứng trục***.

Đường thẳng a gọi là ***trục của phép đối xứng***, hay đơn giản là ***trục đối xứng***.

?1 *Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, những điểm nào biến thành chính nó ?*

?2 *Nếu phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành điểm M' thì nó biến điểm M' thành điểm nào ? Nếu nó biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$ thì nó biến hình $\mathscr{H}'$ thành hình nào ?*

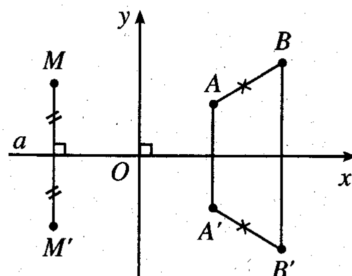
2. Định lí

Phép đối xứng trục là một phép dời hình.


1 (Để chứng minh định lí)

Giả sử $Đ_a$ là phép đối xứng qua đường thẳng a. Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy mà Ox là đường thẳng a (h.7).

Lấy hai điểm tuỳ ý $A(x_A\,;y_A)$ và $B(x_B\,;y_B)$, hãy viết toạ độ của $A' = Đ_a(A)$ và $B' = Đ_a(B)$ rồi dùng công thức tính khoảng cách để chứng minh $A'B' = AB$.



Hình 7



CHÚ Ý

Qua hoạt động trên, ta thấy nếu phép đối xứng qua trục Ox biến điểm $M(x\,;y)$ thành điểm $M'(x'\,;y')$ thì

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Công thức trên gọi là ***biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua trục Ox***.

?3 *Phép đối xứng qua trục Oy có biểu thức toạ độ như thế nào ?*

3. Trục đối xứng của một hình

Chúng ta hãy quan sát bốn hình sau đây (mỗi chữ cái là một hình) :

A D P Q

Người ta nói hình thứ nhất và hình thứ hai có tính "cân xứng" vì với mỗi hình, có thể tìm thấy một đường thẳng sao cho phép đối xứng qua đường thẳng đó biến hình ấy thành chính nó. Các đường thẳng đó gọi là trục đối xứng của mỗi hình. Hai hình còn lại không "cân xứng" vì chúng không có những đường thẳng như vậy.

ĐỊNH NGHĨA 2

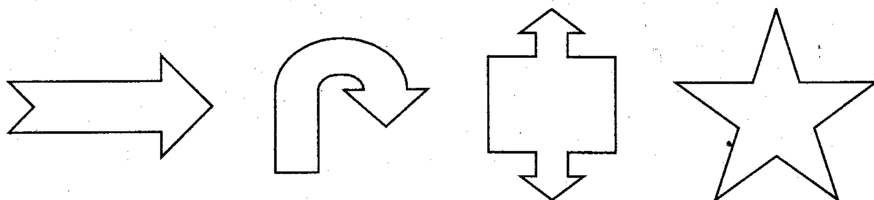
*Đường thẳng d gọi là **trục đối xứng của hình $\mathscr{H}$** nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến $\mathscr{H}$ thành chính nó, tức là $Đ_d(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$.*

Một hình có thể không có trục đối xứng, cũng có thể có một hay nhiều trục đối xứng.

?4 *Trong các hình sau đây, hình nào có trục đối xứng và có mấy trục ? (Mỗi chữ cái là một hình)*

A B C D Đ E G H I K L

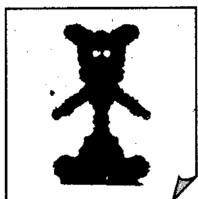
M N O P Q R S T U V X Y Z

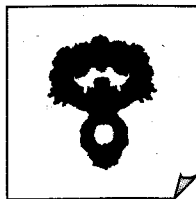


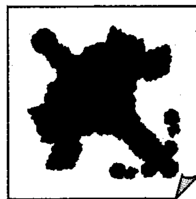
Hãy làm thử !

Các em hãy nhỏ một giọt mực lên một tờ giấy trắng, rồi gấp tờ giấy theo một đường thẳng đi qua giọt mực đó. Áp hai phần của tờ giấy sát vào nhau rồi mở ra. Các em sẽ được những hình có trục đối xứng khá kì thú !

Dưới đây giới thiệu với các em một số hình như vậy.

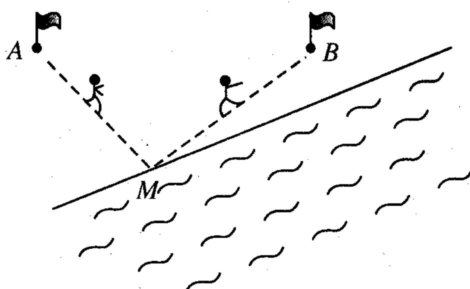






4. Áp dụng

Người ta tổ chức một cuộc chạy thi trên bãi biển với điều kiện sau : Các vận động viên xuất phát từ địa điểm *A* và đích là địa điểm *B*, nhưng trước khi đến *B* phải nhúng mình vào nước biển (ta giả sử rằng mép nước biển là một đường thẳng) (h.8).

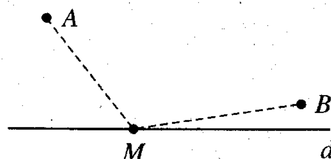


Hình 8

Để chiến thắng trong cuộc chạy đua này, ngoài tốc độ chạy, còn có một yếu tố quan trọng là vận động viên phải xác định vị trí *M* ở mép nước mà mình phải chạy từ *A* tới để nhúng mình vào nước biển, rồi từ đó chạy đến *B* sao cho quãng đường phải chạy là ngắn nhất.

Như vậy, bài toán có thể phát biểu dưới dạng toán học thuần tuý sau đây

Cho hai điểm A và B nằm về một phía của đường thẳng d (h.9). Hãy xác định điểm M trên d sao cho AM + MB bé nhất.



Hình 9

?5 *Nếu hai điểm A và B nằm về hai phía của đường thẳng d thì lời giải bài toán trên rất đơn giản. Trong trường hợp đó, điểm M cần tìm là điểm nào ?*

Bây giờ xét trường hợp A, B nằm về một phía của d. Hãy lấy điểm A' đối xứng với A qua d, và chú ý rằng : $AM + MB = A'M + MB$.



2

Với gợi ý trên đây, hãy nêu lời giải của bài toán.

Câu hỏi và bài tập

7. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ (a là trục đối xứng), đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Hãy trả lời các câu hỏi sau :

a) Khi nào thì d song song với d' ?

b) Khi nào thì d trùng với d' ?

c) Khi nào thì d cắt d' ? Giao điểm của d và d' có tính chất gì ?

d) Khi nào d vuông góc với d' ?

8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ lần lượt có phương trình :

$$(\mathscr{C}_1) : x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0 \ ;$$

$$(\mathscr{C}_2) : x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0.$$

Viết phương trình ảnh của mỗi đường tròn trên qua phép đối xứng có trục Oy.

9. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

10. Cho hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn $(O\ ;R)$ và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn. Khi BC không phải là đường kính, gọi H' là giao điểm của đường thẳng AH với đường tròn $(O\ ;R)$. Chứng minh rằng H đối xứng với H' qua đường thẳng BC.

11. a) Chỉ ra trục đối xứng (nếu có) của mỗi hình sau đây (mỗi hình là một từ bao gồm một số chữ cái) :

MÂM, HOC, NHANH, HE, SHE, COACH, IS, IT, SOS, CHEO

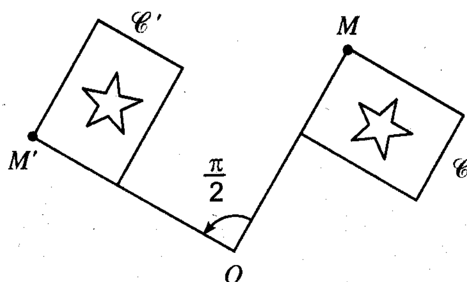
b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số chẵn luôn có trục đối xứng.

§4 PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. Định nghĩa phép quay

> *Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM = OM' và (OM, OM') = φ được gọi là* ***phép quay tâm O góc quay φ****.*

Phép quay thường được kí hiệu là Q, và nếu muốn chỉ rõ tâm quay O và góc quay φ thì ta kí hiệu phép quay đó là $Q_{(O,\ \varphi)}$.



Hình 10

Hình 10 cho ta thấy phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ biến điểm M thành điểm M', biến lá cờ $\mathscr{C}$ thành lá cờ $\mathscr{C}'$.

[?1] *Phép đồng nhất có phải là phép quay hay không ?*

2. Định lí

> *Phép quay là một phép dời hình.*

Chứng minh

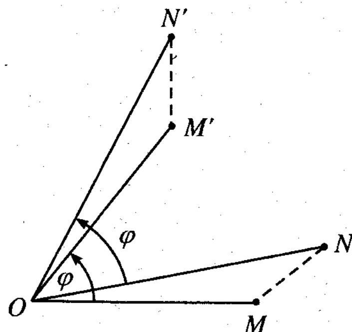
Giả sử phép quay $Q_{(O,\ \varphi)}$ biến điểm M thành M' và biến điểm N thành N', trong đó O, M, N không thẳng hàng (h.11). Theo định nghĩa của phép quay, ta có

$$OM = OM',$$
$$ON = ON'$$

và $(OM, OM') = (ON, ON') = \varphi$.

Theo hệ thức Sa-lơ về góc lượng giác, ta có

$$\begin{aligned}(OM, ON) &= (OM, OM') + (OM', ON)\\ &= (ON, ON') + (OM', ON)\\ &= (OM', ON').\end{aligned}$$

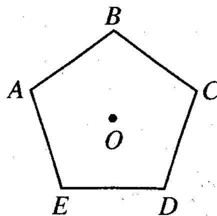


Hình 11

Suy ra $\widehat{MON} = \widehat{M'ON'}$. Như vậy hai tam giác MON và $M'ON'$ bằng nhau, do đó $M'N' = MN$.

Trường hợp O, M, N thẳng hàng, ta thấy ngay $M'N' = MN$. □


1
Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O (h.12). Hãy chỉ ra một số phép quay biến ngũ giác đó thành chính nó.



Hình 12

3. Phép đối xứng tâm

Một trường hợp đặc biệt của phép quay là phép quay với góc quay π. Khi đó, nếu O là tâm quay thì mỗi điểm M được biến thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'. Bởi vậy, phép quay đó còn có tên gọi là phép đối xứng qua điểm O.

Phép đối xứng qua điểm O còn có thể được định nghĩa như sau :

> ***Phép đối xứng qua điểm*** *O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là*
>
> $$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}.$$

1(T)-158

Kí hiệu và thuật ngữ

Phép đối xứng qua điểm O thường được kí hiệu là $Đ_O$. Phép đối xứng qua một điểm còn gọi đơn giản là ***phép đối xứng tâm***.

Điểm O gọi là ***tâm của phép đối xứng***, hay đơn giản là ***tâm đối xứng***.

Biểu thức toạ độ

Trong hệ toạ độ Oxy cho điểm $I(a\ ;\ b)$. Nếu phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm $M(x\ ;\ y)$ thành điểm $M'(x'\ ;\ y')$ thì

$$\boxed{\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y. \end{cases}}$$

Công thức trên gọi là *biểu thức toạ độ của phép đối xứng tâm $Đ_I$*.


2
Hãy giải thích tại sao có công thức trên.

Tâm đối xứng của một hình

Chúng ta hãy quan sát các hình biểu thị các chữ cái sau đây

Z S N

Tuy các hình đó không có trục đối xứng nhưng chúng cũng có tính "cân xứng" nào đó. Lí do là với mỗi hình, ta có thể tìm thấy một điểm O sao cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình đó thành chính nó.

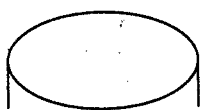
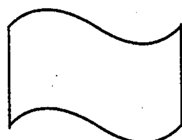
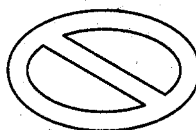
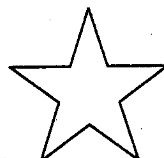
?2 *Điểm O như thế của mỗi hình trên đây là điểm nào ?*

Các điểm O như vậy được gọi là tâm đối xứng của mỗi hình.

> *Điểm O gọi là **tâm đối xứng của một hình** $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó, tức là $Đ_O(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$.*

?3 *Trong bảng chữ cái in hoa, những chữ nào có tâm đối xứng ? Những chữ nào có tâm đối xứng nhưng không có trục đối xứng ?*

?4 *Trong các hình sau đây, hình nào có tâm đối xứng ?*

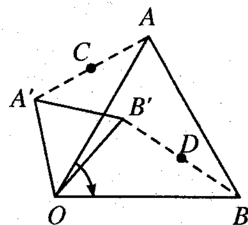
1(I)-158

4. Ứng dụng của phép quay

Bài toán 1

Cho hai tam giác đều OAB và OA'B' như hình 13.

Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Chứng minh rằng OCD là tam giác đều.



Hình 13

Giải

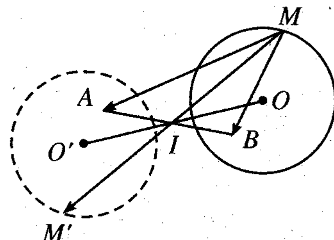
Xét phép quay Q tâm O với góc quay bằng một góc lượng giác (OA, OB). Rõ ràng Q biến A thành B và biến A' thành B', nên Q biến đoạn thẳng AA' thành đoạn thẳng BB'. Từ đó suy ra Q biến trung điểm C của AA' thành trung điểm D của BB'. Do đó $OC = OD$ và $\widehat{COD} = 60^{\circ}$. Vậy OCD là tam giác đều. □

Bài toán 2

Cho đường tròn $(O ; R)$ và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Tìm quỹ tích điểm M' khi điểm M chạy trên $(O ; R)$.

Giải (h.14)

Gọi I là trung điểm của AB thì I cố định và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.



Hình 14

Bởi vậy, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, tức là MM' nhận I làm trung điểm hay phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành M'. Vậy khi M chạy trên đường tròn $(O ; R)$ thì quỹ tích M' là ảnh của đường tròn đó qua $Đ_I$. Nếu ta gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì quỹ tích của M' là đường tròn $(O' ; R)$. □

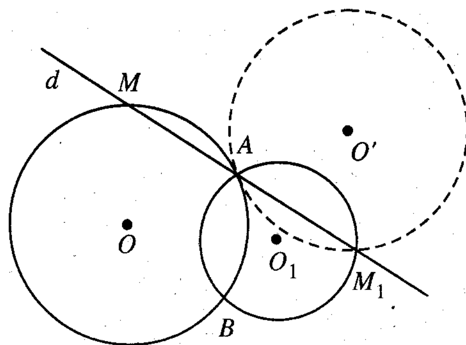
Bài toán 3

Cho hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O_1 ; R_1)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A cắt $(O ; R)$ và $(O_1 ; R_1)$ lần lượt tại M và M_1 sao cho A là trung điểm của MM_1.

Giải (h.15)

Giả sử ta đã dựng được đường thẳng d thoả mãn yêu cầu của bài toán. Gọi $Đ_A$ là phép đối xứng qua A thì $Đ_A$ biến điểm M thành điểm M_1 và biến

đường tròn $(O\ ;\ R)$ thành đường tròn $(O'\ ;\ R)$. Vì M nằm trên $(O\ ;\ R)$ nên M_1 nằm trên $(O'\ ;\ R)$. Mặt khác M_1 lại nằm trên $(O_1\ ;\ R_1)$ nên M_1 là giao điểm khác A của hai đường tròn $(O'\ ;\ R)$ và $(O_1\ ;\ R_1)$.



Hình 15

Từ đó suy ra cách dựng :

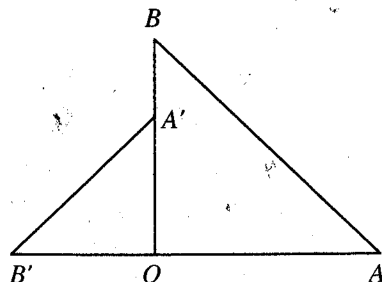
- Dựng đường tròn $(O'\ ;\ R)$ đối xứng với $(O\ ;\ R)$ qua điểm A (O' là điểm đối xứng của O qua A).
- Lấy giao điểm M_1 của hai đường tròn $(O_1\ ;\ R_1)$ và $(O'\ ;\ R)$, M_1 khác A.
- Đường thẳng d là đường thẳng đi qua A và M_1.

?5 *Vì sao d thoả mãn điều kiện của bài toán ?*

Câu hỏi và bài tập

12. Cho phép quay Q tâm O với góc quay φ và cho đường thẳng d. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua phép quay Q.

13. Cho hai tam giác vuông cân OAB và $OA'B'$ có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng $A'B$ (h.16). Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tam giác vuông cân.



Hình 16

14. Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chứng minh

a) Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, O cách đều d và d' ;

b) Hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

15. Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_O$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

16. Chỉ ra các tâm đối xứng của các hình sau đây :

a) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau ;

b) Hình gồm hai đường thẳng song song ;

c) Hình gồm hai đường tròn bằng nhau ;

d) Đường elip ;

e) Đường hypebol.

17. Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy vẽ đường kính AM của đường tròn rồi chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng HM.

18. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$, đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên $(O\ ;\ R)$ và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $I(x_0\ ;\ y_0)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ'. Viết phương trình của Δ'.

§5 HAI HÌNH BẰNG NHAU

Chúng ta biết rằng phép dời hình biến tam giác thành tam giác bằng nó.

Bây giờ ta đặt vấn đề : Cho hai tam giác bằng nhau thì có hay không một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia ?

1. Định lí

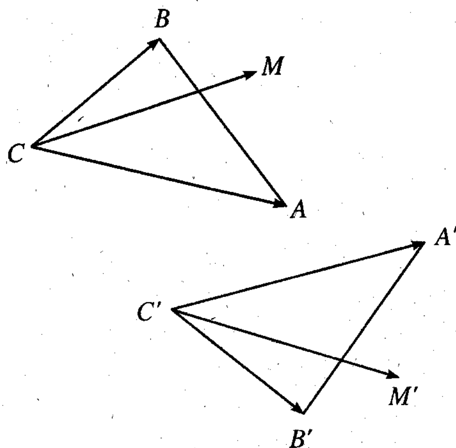
> *Nếu ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.*

Chứng minh

Ta xác định một phép biến hình F như sau : F biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho nếu $\overrightarrow{CM} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$ $(p \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R})$ thì $\overrightarrow{C'M'} = p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'}$ (h.17).

Ta chứng minh F là phép dời hình. Thật vậy, giả sử có thêm điểm N và F biến N thành N', tức là nếu $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB}$ thì $\overrightarrow{C'N'} = k\overrightarrow{C'A'} + l\overrightarrow{C'B'}$. Khi đó

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM}$$
$$= (k-p)\overrightarrow{CA} + (l-q)\overrightarrow{CB}.$$



Hình 17

Suy ra

$$MN^2 = \overrightarrow{MN}^2$$
$$= (k-p)^2CA^2 + (l-q)^2CB^2 + 2(k-p)(l-q)\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$M'N'^2 = \overrightarrow{M'N'}^2$$
$$= (k-p)^2C'A'^2 + (l-q)^2C'B'^2 + 2(k-p)(l-q)\overrightarrow{C'A'}.\overrightarrow{C'B'}.$$

Vì hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau nên $CA = C'A'$, $CB = C'B'$ và $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'}.\overrightarrow{C'B'}$. Bởi vậy, ta suy ra $MN = M'N'$ hay F là phép dời hình. Rõ ràng phép dời hình đó biến A, B, C lần lượt thành A', B', C', tức là biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. □

2. Thế nào là hai hình bằng nhau ?

Từ định lí trên ta có thể phát biểu : "*Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi có phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia*". Như vậy, khái niệm "bằng nhau" của hai tam giác có thể được định nghĩa bằng hai cách tương đương sau đây :

1) Hai tam giác gọi là bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.

2) Hai tam giác gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia.

Đối với sự bằng nhau của các hình nói chung, người ta dùng cách định nghĩa thứ hai. Vậy ta có định nghĩa tổng quát sau đây

> *Hai hình gọi là **bằng nhau** nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.*

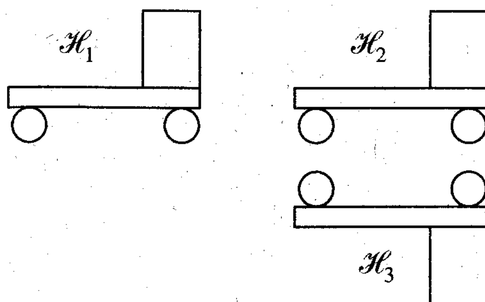
Từ định nghĩa trên ta suy ra

Nếu hình $\mathscr{H}_1$ bằng hình $\mathscr{H}_2$ và hình $\mathscr{H}_2$ bằng hình $\mathscr{H}_3$ thì hình $\mathscr{H}_1$ bằng hình $\mathscr{H}_3$.

Thật vậy, vì $\mathscr{H}_1$ bằng $\mathscr{H}_2$ nên có phép dời hình F biến $\mathscr{H}_1$ thành $\mathscr{H}_2$, vì $\mathscr{H}_2$ bằng $\mathscr{H}_3$ nên có phép dời hình G biến $\mathscr{H}_2$ thành $\mathscr{H}_3$.

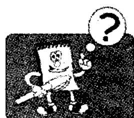
Nếu ta thực hiện liên tiếp phép dời hình F và phép dời hình G thì hiển nhiên ta được phép dời hình biến $\mathscr{H}_1$ thành $\mathscr{H}_3$. Vậy $\mathscr{H}_1$ bằng $\mathscr{H}_3$.

Chẳng hạn, trên hình 18, hình $\mathscr{H}_1$ bằng hình $\mathscr{H}_2$ vì có phép tịnh tiến biến $\mathscr{H}_1$ thành $\mathscr{H}_2$; hình $\mathscr{H}_2$ bằng hình $\mathscr{H}_3$ vì có phép đối xứng trục biến $\mathscr{H}_2$ thành $\mathscr{H}_3$. Vậy hai hình $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_3$ bằng nhau.



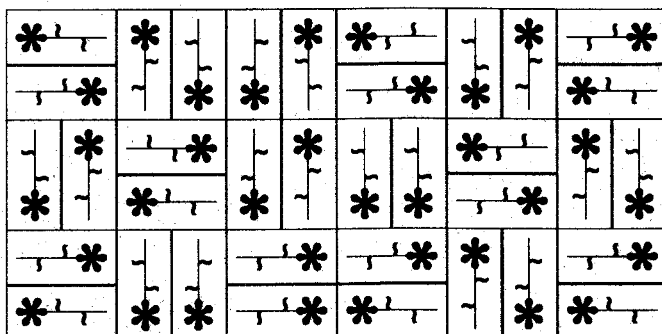
Hình 18

Có thể em chưa biết



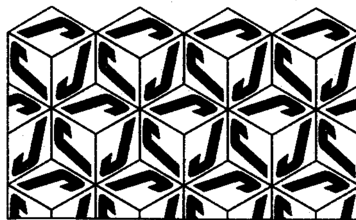
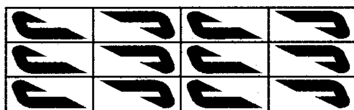
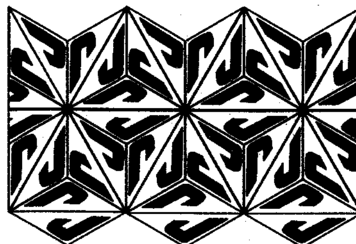
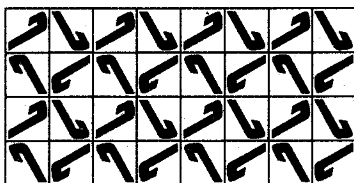
LÁT MẶT PHẲNG

Từ xa xưa, người ta đã biết trang trí bức tường, dệt thêu thảm hoa, lát nền nhà, ... bằng những hình vẽ, những viên gạch bằng nhau với các hoa văn giống nhau, ...

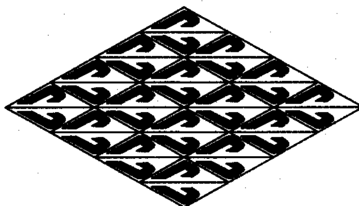
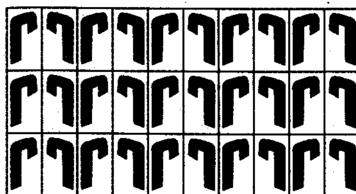
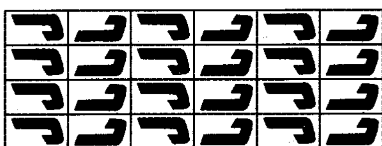
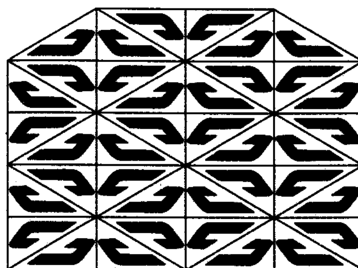
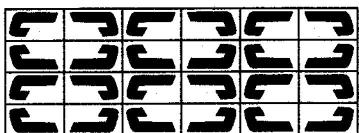
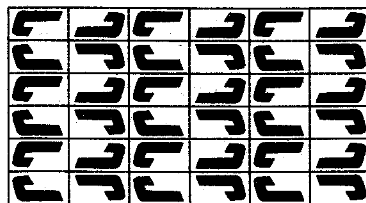
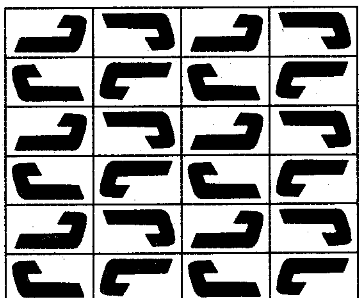
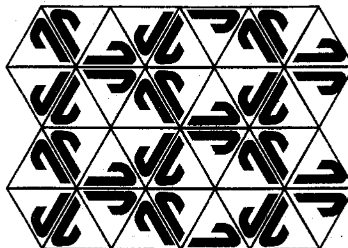


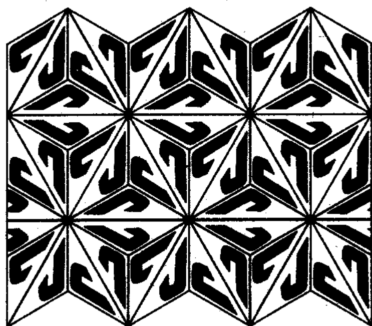
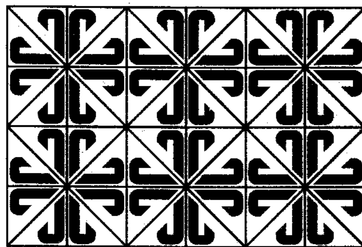
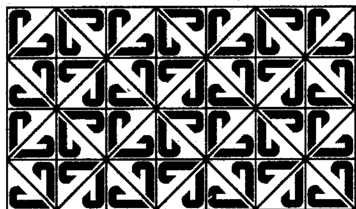
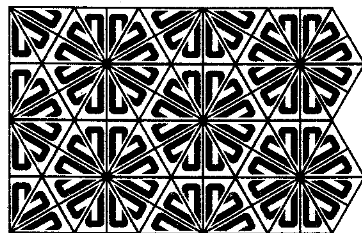
Các mẫu hình vẽ, hoa văn, ... có thể rất khác nhau nhưng người ta chứng minh được rằng thực ra chỉ có 17 cách sắp xếp lặp đi lặp lại các hình như thế để lát khắp mặt phẳng.

Nếu chỉ dùng các phép tịnh tiến và phép quay để biến một viên gạch này thành một viên gạch khác thì có 5 cách lát :

Còn nếu dùng thêm cả phép đối xứng trục thì có thêm 12 cách lát nữa :

Trong 17 cách lát trên, người ta đã tìm thấy 11 cách lát ở đền Alhambra thành phố Granada (Tây Ban Nha), 5 cách khác đã tìm thấy ở châu Phi, cách còn lại cũng đã tìm thấy trong một trang trí cổ ở Trung Quốc.

Câu hỏi và bài tập

20. Chứng tỏ rằng hai hình chữ nhật cùng kích thước (cùng chiều dài và chiều rộng) thì bằng nhau.

21. a) Chứng minh rằng hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

b) Chứng minh rằng hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

c) Hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau hay không ?

22. Đa giác lồi n cạnh gọi là n-giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai n-giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.

23. Hình $\mathscr{H}_1$ gồm ba đường tròn $(O_1 ; r_1)$, $(O_2 ; r_2)$ và $(O_3 ; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình $\mathscr{H}_2$ gồm ba đường tròn $(I_1 ; r_1)$, $(I_2 ; r_2)$ và $(I_3 ; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ bằng nhau.

24. Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

§6 PHÉP VỊ TỰ



Hin-be (Hilbert)



Ai đây ?

Chúng ta hãy quan sát hai bức chân dung ở hình vẽ trên. Tuy kích thước của chúng khác nhau nhưng hình dạng của chúng rất "giống nhau" (ta nói chúng "đồng dạng" với nhau). Vì bức nhỏ hơn là chân dung của nhà toán học Hin-be, nên bức lớn hơn cũng là chân dung của nhà toán học đó.

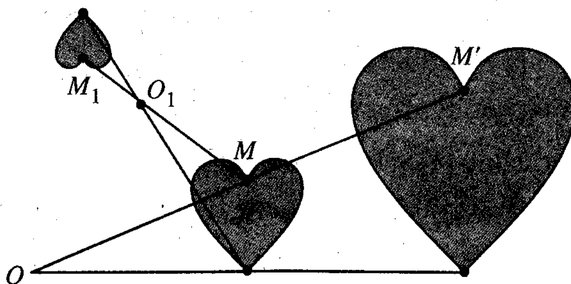
Sau đây, chúng ta sẽ nói về các phép biến hình không làm thay đổi hình dạng của hình. Trước hết, trong bài này, ta nói đến phép vị tự, một trường hợp riêng của những phép biến hình như thế.

1. Định nghĩa

Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là ***phép vị tự tâm O tỉ số k.***

Ta thường kí hiệu phép vị tự bởi chữ V, nếu cần nói rõ tâm O và tỉ số k của nó thì ta kí hiệu là $V_{(O,\ k)}$.

Hình 19 cho ta thấy phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{1}{2}$ biến hình $\mathscr{H}$ thành các hình như thế nào.



Hình 19

2. Các tính chất của phép vị tự

ĐỊNH LÍ 1

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \text{ và } M'N' = |k|MN.$$

Chứng minh

Nếu O là tâm của phép vị tự thì theo định nghĩa, ta có $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$.

Vậy $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{MN}$.

Từ đó suy ra $M'N' = |k|MN$. □

ĐỊNH LÍ 2

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.

Chứng minh

Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng mà B nằm giữa A và C, tức là $\overrightarrow{BA} = m\overrightarrow{BC}$ với $m < 0$. Nếu phép vị tự tỉ số k biến A, B, C lần lượt thành A', B', C' thì theo định lí 1, ta có $\overrightarrow{B'A'} = k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{B'A'} = k\overrightarrow{BA} = k(m\overrightarrow{BC}) = m(k\overrightarrow{BC}) = m\overrightarrow{B'C'}$, tức là ba điểm A', B', C' thẳng hàng với B' nằm giữa A' và C'. □

HỆ QUẢ

Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.

?1 *Những đường thẳng nào biến thành chính nó qua phép vị tự với tỉ số $k \neq 1$?*
Những đường tròn nào biến thành chính nó qua phép vị tự với tỉ số $k \neq 1$?

3. Ảnh của đường tròn qua phép vị tự

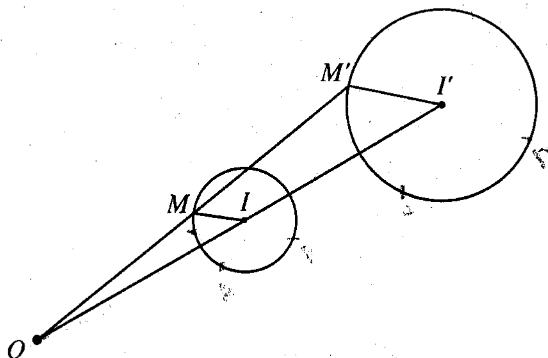
ĐỊNH LÍ 3

> *Phép vị tự tỉ số k biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.*

Chứng minh (h.20)

Giả sử V là phép vị tự tâm O tỉ số k và $(I\ ;\ R)$ là đường tròn đã cho. Gọi I' là ảnh của I và M' là ảnh của điểm M bất kì thì ta có $I'M' = |k|IM$.

Bởi vậy $IM = R$ khi và chỉ khi $I'M' = |k|R$ hay là M' thuộc đường tròn $(I'\ ;\ R')$ với $R' = |k|R$. Đó chính là ảnh của đường tròn $(I\ ;\ R)$ qua phép vị tự V. □



Hình 20



1

Trên hình 20, hãy vẽ một đường thẳng d qua tâm vị tự O, cắt đường tròn $(I\ ;\ R)$ tại A và B, cắt đường tròn $(I'\ ;\ R')$ tại C và D. Hãy nói rõ các điểm A và B được biến thành những điểm nào qua phép vị tự đó, và giải thích tại sao.

Nếu đường thẳng d nói trên tiếp xúc với đường tròn $(I\ ;\ R)$ thì d có tiếp xúc với đường tròn $(I'\ ;\ R')$ hay không ? Nhận xét gì về các tiếp điểm ?

4. Tâm vị tự của hai đường tròn

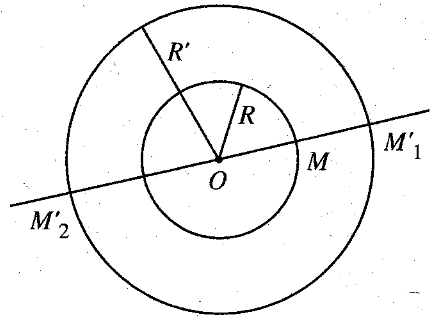
Ta đã biết rằng phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn. Bây giờ ta xét bài toán ngược lại.

Bài toán 1

Cho hai đường tròn $(I\ ;\ R)$ và $(I'\ ;\ R')$ phân biệt. *Hãy tìm các phép vị tự biến đường tròn $(I\ ;\ R)$ thành đường tròn $(I'\ ;\ R')$.*

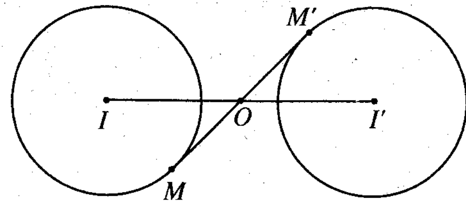
Giải

Trước hết, ta có nhận xét : Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến $(I\ ;\ R)$ thành $(I'\ ;\ R')$ thì $|k| = \dfrac{R'}{R}$ hay $k = \pm\dfrac{R'}{R}$ và $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$. Từ đó ta xác định được các phép vị tự mà bài toán yêu cầu. Cụ thể là :



Hình 21

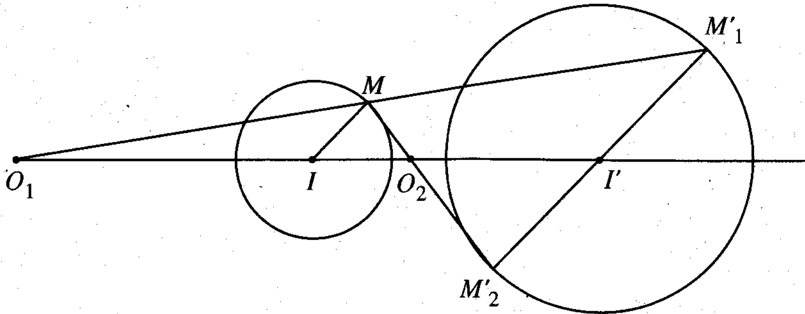
Trường hợp hai đường tròn $(I\ ;\ R)$ *và* $(I'\ ;\ R')$ *đồng tâm,* $R \neq R'$, hiển nhiên khi đó O trùng với I. Vậy ta có hai phép vị tự : phép vị tự V_1 tâm I tỉ số $\dfrac{R'}{R}$ và phép vị tự V_2 tâm I tỉ số $-\dfrac{R'}{R}$. (Trên hình 21, phép vị tự V_1 biến M thành M'_1 và phép vị tự V_2 biến M thành M'_2).



Hình 22

Trường hợp I *không trùng với* I' *nhưng* $R = R'$, *tức là* $k = \pm 1$, khi đó điểm O phải thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$ nên k chỉ có thể bằng -1, và O là trung điểm của đoạn thẳng II'. Vậy trong trường hợp này chỉ có một phép vị tự : tâm O, tỉ số -1, đó cũng chính là phép đối xứng qua điểm O (h.22).

Trường hợp I *không trùng* I' và $R \neq R'$, ta có thể xác định các phép vị tự như sau (h.23) :



Hình 23

Ta lấy $M'_1M'_2$ là một đường kính của $(I'\ ;\ R')$ và IM là một bán kính của $(I\ ;\ R)$ sao cho hai vectơ $\overrightarrow{I'M'_1}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng. Đường thẳng II' cắt MM'_1 và MM'_2 lần lượt tại O_1 và O_2.

Khi đó phép vị tự V_1 tâm O_1 tỉ số $k_1 = \dfrac{R'}{R}$ và phép vị tự V_2 tâm O_2 tỉ số $k_2 = -\dfrac{R'}{R}$ đều biến đường tròn $(I\ ;\ R)$ thành đường tròn $(I'\ ;\ R')$. □

Thuật ngữ

Nếu có phép vị tự tâm O biến đường tròn này thành đường tròn kia thì O được gọi là ***tâm vị tự của hai đường tròn** đó*.

Nếu phép vị tự đó có tỉ số dương thì điểm O gọi là ***tâm vị tự ngoài***, nếu phép vị tự đó có tỉ số âm thì điểm O gọi là ***tâm vị tự trong***.

Trên hình 23, hai đường tròn $(I\ ;\ R)$ và $(I'\ ;\ R')$ có O_1 là tâm vị tự ngoài, O_2 là tâm vị tự trong.

5. Ứng dụng của phép vị tự

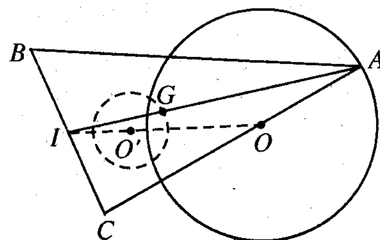
Bài toán 2

Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O ; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải (h.24)

Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}.$$



Hình 24.

Như vậy phép vị tự V tâm I tỉ số $\frac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G. Từ đó suy ra khi A chạy trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ thì quỹ tích G là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V, tức là đường tròn $(O'\ ;\ R')$ mà $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ và $R' = \frac{1}{3}R$. □

Bài toán 3

Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ *(như vậy khi ba điểm G, H, O không trùng nhau thì chúng cùng nằm trên một đường thẳng, được gọi là đường thẳng Ơ-le).*



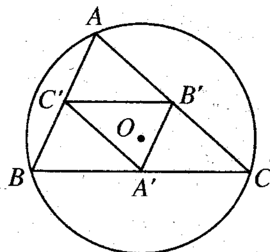
2 (Để giải bài toán 3)

Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC (h.25).

1) Hãy chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác $A'B'C'$.

2) Gọi V là phép vị tự tâm G, tỉ số -2. Hãy tìm ảnh của tam giác $A'B'C'$ qua V.

3) Qua phép vị tự V, điểm O biến thành điểm nào ? Vì sao ? Từ đó suy ra kết luận của bài toán.



Hình 25

?2 *Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Qua phép vị tự V nói trên, điểm O' biến thành điểm nào ?*

Câu hỏi và bài tập

25. Các phép sau đây có phải là phép vị tự hay không : phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đồng nhất, phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$?

26. Các khẳng định sau đây có đúng không ?

a) Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).

b) Phép vị tự không thể có quá một điểm bất động.

c) Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

27. Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau :

a) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

b) Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

c) Một đường tròn chứa đường tròn kia.

28. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

29. Cho đường tròn $(O ; R)$ và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

30. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn (O'') thay đổi, luôn luôn tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

§7 PHÉP ĐỒNG DẠNG

1. Định nghĩa phép đồng dạng

*Phép biến hình F gọi là **phép đồng dạng tỉ số k*** $(k > 0)$ *nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có* $M'N' = kMN$.

?1 *Phép dời hình và phép vị tự có phải là những phép đồng dạng hay không ? Nếu có thì tỉ số đồng dạng là bao nhiêu ?*



Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k và D là một phép dời hình. Với mỗi điểm M bất kì, V biến điểm M thành điểm M_1 và D biến điểm M_1 thành điểm M'. Như vậy ta có một phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'. Có thể nói F có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình V và D.

Người ta còn nói rằng F là ***phép hợp thành*** của hai phép biến hình V và D.

Hãy chứng tỏ rằng F là một phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

Như vậy, nếu thực hiện liên tiếp một phép vị tự và một phép dời hình thì kết quả là một phép đồng dạng. Điều ngược lại cũng đúng. Ta có thể chứng minh được định lí sau đây.

2. Định lí

Mọi phép đồng dạng F tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

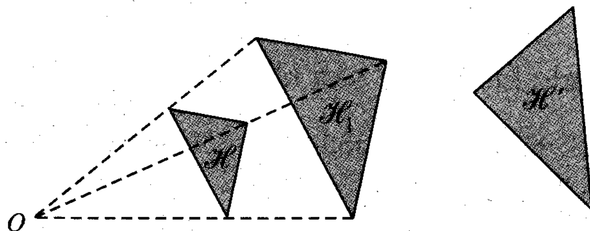
HỆ QUẢ (tính chất của phép đồng dạng)

Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số của phép đồng dạng), biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR, biến góc thành góc bằng nó.

?2 *Có phải mọi phép đồng dạng đều biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó hay không ?*

3. Hai hình đồng dạng

Trên hình 26, ta có hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}_1$ vị tự với nhau (nghĩa là có phép vị tự V biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}_1$), hai hình $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}'$ bằng nhau (nghĩa là có phép dời hình D biến hình $\mathscr{H}_1$ thành hình $\mathscr{H}'$).



Hình 26

Nếu gọi F là phép hợp thành của V và D thì F là phép đồng dạng biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$.

Ta nói rằng *hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ đồng dạng với nhau*. Như vậy ta có :

ĐỊNH NGHĨA

*Hai hình gọi là **đồng dạng với nhau** nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.*



CHÚ Ý

Ở lớp 8, ta đã biết thế nào là hai tam giác đồng dạng. Khái niệm đó phù hợp với định nghĩa trên.

Câu hỏi và bài tập

31. Chứng tỏ rằng nếu phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

32. Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

33. Dựng tam giác ABC nếu biết hai góc $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$ và một trong các yếu tố sau :

a) Đường cao $AH = h$;

b) Đường trung tuyến $AM = m$;

c) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, nghĩa là nếu phép dời hình biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $M'N' = MN$.

2. Các tính chất của phép dời hình : biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến góc thành góc bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3. Các phép dời hình cụ thể :

a) Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ (theo vectơ $\vec{u}$) biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

b) Phép đối xứng trục $Đ_d$ (trục là đường thẳng d) biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua d.

c) Phép quay $Q_{(O,\ \varphi)}$ (tâm O, góc quay φ) biến O thành O, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và góc lượng giác (OM, OM') bằng φ.

d) Phép đối xứng tâm $Đ_O$ (tâm là điểm O) biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O.

4. Định nghĩa về hai hình bằng nhau : Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

5. Phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) là phép biến hình biến mỗi cặp điểm M, N thành cặp điểm M', N' sao cho $M'N' = kMN$.

6. Phép đồng dạng có các tính chất : biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng

thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số của phép đồng dạng), biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k, biến một góc thành góc có cùng số đo, biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính kR.

7. Phép vị tự $V_{(O,\, k)}$ tâm O tỉ số k ($k \neq 0$) biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

8. Các tính chất của phép vị tự : Phép vị tự tâm O tỉ số k là một phép đồng dạng tỉ số $|k|$ nên có các tính chất của phép đồng dạng. Ngoài ra, phép vị tự có tính chất đặc biệt sau : đường thẳng nối một điểm và ảnh của nó luôn luôn đi qua O ; ảnh d' của đường thẳng d luôn song song hoặc trùng với d.

9. Mỗi phép đồng dạng bao giờ cũng có thể xem là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình.

10. Định nghĩa về hai hình đồng dạng : Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia .

II - Các câu hỏi tự kiểm tra

1. Các khẳng định sau đây có đúng không ?

a) Phép đồng nhất là một phép tịnh tiến ;

b) Phép đồng nhất là một phép quay ;

c) Phép đồng nhất là một phép đối xứng tâm ;

d) Phép đối xứng tâm là một phép vị tự ;

e) Phép quay là một phép đồng dạng ;

f) Phép vị tự là một phép dời hình.

2. Cho hai điểm A, B phân biệt. Các khẳng định sau đây có đúng không ?

a) Có duy nhất một phép đối xứng trục biến A thành B ;

b) Có duy nhất một phép đối xứng tâm biến A thành B ;

c) Có duy nhất một phép tịnh tiến biến A thành B ;

d) Có duy nhất một phép quay biến A thành B ;

e) Có duy nhất một phép vị tự biến A thành B.

3. Hãy chỉ ra một số hình có một trong các tính chất dưới đây :

a) Có vô số trục đối xứng ;

b) Có vô số tâm đối xứng ;

c) Có đúng n trục đối xứng.

III - Bài tập

1. Cho hai đường tròn $(O\ ;\ R)$, $(O'\ ;\ R')$ và một đường thẳng d.

   a) Tìm hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

   b) Xác định điểm I trên d sao cho tiếp tuyến IT của $(O\ ;\ R)$ và tiếp tuyến IT' của $(O'\ ;\ R')$ hợp thành các góc mà d là một trong các đường phân giác của các góc đó.

2. Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.

3. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P, Q và hai điểm A, B nằm về một phía đối với d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và $AM + BN$ bé nhất.

4. Cho vectơ $\vec{u}$ và một điểm O. Với điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua O và M' là điểm sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M'.

   a) F là phép hợp thành của hai phép nào ? F có phải là phép dời hình hay không ?

   b) Chứng tỏ rằng F là một phép đối xứng tâm.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C.

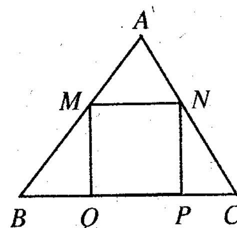
   a) Chứng tỏ rằng phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là một phép đối xứng tâm.

   b) Tìm quỹ tích điểm M_3.

6. Gọi F là phép biến hình có tính chất sau đây : Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tịnh tiến hoặc phép vị tự.

7. a) Cho tam giác ABC và hình vuông $MNPQ$ như hình 27. Gọi V là phép vị tự tâm A tỉ số $k = \dfrac{AB}{AM}$. Hãy dựng ảnh của hình vuông $MNPQ$ qua phép vị tự V.

   b) Từ bài toán ở câu a) hãy suy ra cách giải bài toán sau : Cho tam giác nhọn ABC, hãy dựng hình vuông $MNPQ$ sao cho hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC và hai đỉnh M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC.



Hình 27

8. Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM, N là trung điểm của CQ.

b) Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

9. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của $(O\ ;\ R)$ có độ dài không đổi $BC = m$. Tìm quỹ tích các điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

IV. Các câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d thành d' ?

(A) Không có phép tịnh tiến nào ;
(B) Có duy nhất một phép tịnh tiến ;
(C) Chỉ có hai phép tịnh tiến ;
(D) Có vô số phép tịnh tiến.

2. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a'$, $b \parallel b'$, a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến a và b lần lượt thành a' và b' ?

(A) Không có phép tịnh tiến nào ;
(B) Có duy nhất một phép tịnh tiến ;
(C) Chỉ có hai phép tịnh tiến ;
(D) Có rất nhiều phép tịnh tiến.

3. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến d thành d' ?

(A) Không có phép đối xứng trục nào ;
(B) Có duy nhất một phép đối xứng trục ;
(C) Chỉ có hai phép đối xứng trục ;
(D) Có rất nhiều phép đối xứng trục.

4. Trong các hình sau đây, hình nào có bốn trục đối xứng ?

(A) Hình bình hành ;
(B) Hình chữ nhật ;
(C) Hình thoi ;
(D) Hình vuông.

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

(A) Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau có trục đối xứng ;
(B) Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng tuỳ ý có trục đối xứng ;
(C) Hình gồm một đường tròn và một đường thẳng tuỳ ý có trục đối xứng ;
(D) Hình gồm một tam giác cân và đường tròn ngoại tiếp tam giác đó có trục đối xứng.

6. Trong các hình sau đây, hình nào không có tâm đối xứng ?

(A) Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp ;

(B) Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp ;

(C) Hình lục giác đều ;

(D) Hình gồm một hình vuông và đường tròn nội tiếp.

7. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Xét phép quay Q có tâm quay O và góc quay φ. Với giá trị nào sau đây của φ, phép quay Q biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó ?

(A) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; (B) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; (C) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; (D) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

8. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k = 100$ biến d thành d' ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có duy nhất một phép ;

(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có rất nhiều phép.

9. Cho đường tròn $(O ; R)$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây :

(A) Có phép tịnh tiến biến $(O ; R)$ thành chính nó ;

(B) Có hai phép vị tự biến $(O ; R)$ thành chính nó ;

(C) Có phép đối xứng trục biến $(O ; R)$ thành chính nó ;

(D) Trong ba mệnh đề A, B, C, có ít nhất một mệnh đề sai.

10. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai** ?

(A) Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn nằm ngoài hai đường tròn đó ;

(B) Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn không nằm giữa hai tâm của hai đường tròn đó ;

(C) Tâm vị tự trong của hai đường tròn luôn thuộc đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn đó ;

(D) Tâm vị tự của hai đường tròn có thể là điểm chung của cả hai đường tròn đó.

11. Phép biến hình nào sau đây không có tính chất : "Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó" ?

(A) Phép tịnh tiến ; (B) Phép đối xứng tâm ;

(C) Phép đối xứng trục ; (D) Phép vị tự.

12. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai** ?

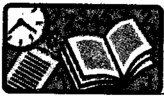
(A) Phép dời hình là một phép đồng dạng ;

(B) Phép vị tự là một phép đồng dạng ;

(C) Phép đồng dạng là một phép dời hình ;

(D) Có phép vị tự không phải là phép dời hình.

Bài đọc thêm



HÌNH TỰ ĐỒNG DẠNG VÀ HÌNH HỌC FRAC-TAN (FRACTAL)

Hình trong mặt phẳng được gọi là *hình tự đồng dạng* nếu mỗi mẩu nhỏ của nó đều chứa một bộ phận đồng dạng với hình đó, tức là khi phóng to bộ phận này theo một tỉ số thích hợp, ta có thể đặt chồng khít lên hình đã cho.

Ví dụ : đoạn thẳng, hình tam giác đều, hình vuông là những hình tự đồng dạng.

Nhiều hình tự đồng dạng được xây dựng bằng phương pháp lặp (xây dựng theo từng bước). Ví dụ :

• **Tập Căng-to** (Cantor) : Cho một đoạn thẳng. Ở bước một, chia đoạn thẳng đó thành ba đoạn con bằng nhau rồi xoá khoảng ở giữa (không kể hai mút). Ở mỗi bước tiếp theo, chia mỗi đoạn chưa xoá thành ba đoạn con bằng nhau rồi xoá khoảng ở giữa (không kể hai mút). Cứ làm thế mãi thì hình còn lại là tập Căng-to.



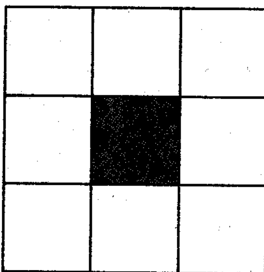
Xoá thế mãi thì phần còn lại là "tập Căng-to".

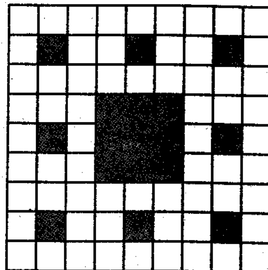
• **Đường Vôn Kốc** (Von Koch) : Cho một đoạn thẳng. Ở bước một, chia đoạn thẳng đó thành ba đoạn con bằng nhau, dựng tam giác đều trên đoạn con ở giữa rồi xoá cạnh đáy của tam giác đó thì được một đường gấp khúc. Ở mỗi bước tiếp theo, chia mỗi đoạn của đường gấp khúc thành ba đoạn con bằng nhau, dựng tam giác đều trên đoạn con ở giữa rồi xoá cạnh đáy của tam giác đó. Cứ làm thế mãi thì được "đường Vôn Kốc".

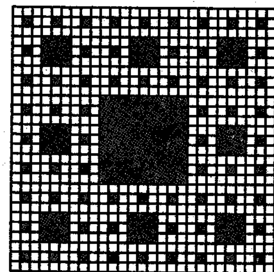


Dựng thế mãi thì được "đường Vôn Kốc".

• **Thảm Xéc-pin-xki** (Sierpinski) : Cho một hình vuông. Ở bước một, chia hình vuông đó thành 9 hình vuông con bằng nhau (bằng các đoạn thẳng song song với các cạnh hình vuông) rồi xoá hình vuông con ở chính giữa (không xoá các cạnh) thì được hình gồm 8 hình vuông con. Ở bước hai, lại chia mỗi hình vuông con chưa xoá này thành 9 hình vuông con bằng nhau, rồi xoá hình vuông con ở chính giữa. Cứ làm thế mãi thì hình còn lại là "thảm Xéc-pin-xki".



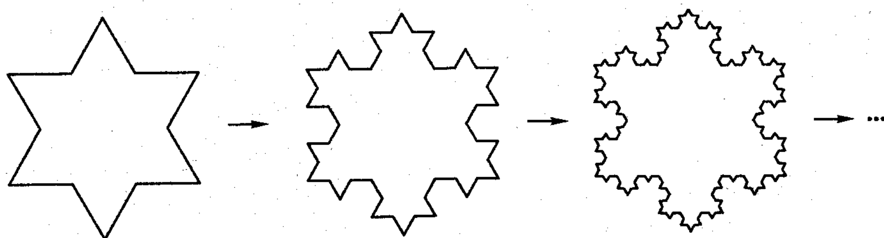




Xoá thế mãi thì phần còn lại là "thảm Xéc-pin-xki".

Nhiều hình tự đồng dạng phức tạp như thế là những đối tượng nghiên cứu của *Hình học frac-tan*, một môn hình học được khởi đầu nghiên cứu từ cuối thế kỉ XX bởi nhà toán học Man-đen-brô (Benoit Mandelbrot) nhằm mô tả hình học nhiều cấu trúc gập gẫy, gồ ghề, lồi lõm, kì dị, hỗn độn, ... của nhiều hiện tượng vật lí, tự nhiên. Hình học frac-tan còn nghiên cứu cả những hình không tự đồng dạng như "bông tuyết Vôn Kốc".

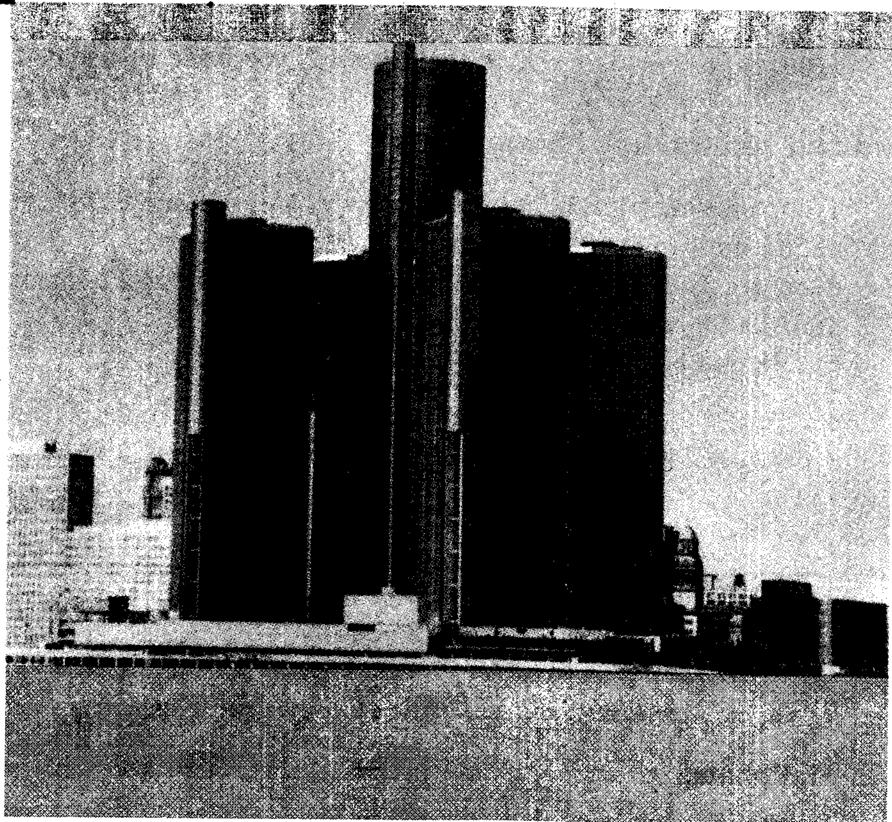
• **Bông tuyết Vôn Kốc** được xây dựng bằng phương pháp lặp như sau : Cho tam giác đều. Ở bước một, chia mỗi cạnh của tam giác thành ba đoạn bằng nhau, dựng tam giác đều trên đoạn ở giữa (ở bên ngoài tam giác đã cho) rồi xoá cạnh đáy của tam giác đều này thì được một đường gấp khúc kín. Ở mỗi bước tiếp theo, chia mỗi đoạn của đường gấp khúc kín thành ba đoạn con bằng nhau, dựng tam giác đều trên đoạn con ở giữa (ở bên ngoài đường gấp khúc kín đó) rồi xoá cạnh đáy. Cứ làm thế mãi thì được "bông tuyết Vôn Kốc".



Dựng thế mãi thì được "bông tuyết Vôn Kốc".

CHƯƠNG II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG



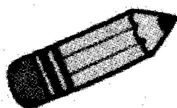
Điểm, đường thẳng và mặt phẳng là những khái niệm quen thuộc trong đời sống hàng ngày của chúng ta. Chúng cũng là những đối tượng cơ bản của hình học không gian. Từ chúng, ta có thể tạo nên những vật thể khác nhau như : hình chóp, hình lăng trụ, hình nón, ...

Học xong chương này, học sinh cần nắm vững : cách xác định mặt phẳng ; mối quan hệ giữa các đường thẳng, giữa các mặt phẳng, giữa các đường thẳng và mặt phẳng, đặc biệt là quan hệ song song giữa chúng ; cách xác định thiết diện của một hình khi cắt bởi một mặt phẳng ; cách vẽ hình biểu diễn và các tính chất của hai hình quan trọng là hình chóp, hình lăng trụ.

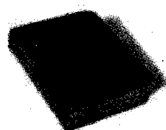
§1 ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Mở đầu về hình học không gian

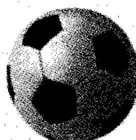
Trong chương trình hình học lớp 10 và chương I của lớp 11, ta chỉ nói đến những hình trong mặt phẳng như : tam giác, đường tròn, vectơ, ... Chúng được gọi là những *hình phẳng*. Nhưng xung quanh chúng ta còn có các hình không nằm trong mặt phẳng như : cây bút chì (h.28), quyển sách (h.29), quả bóng (h.30), ngôi nhà (h.31), ...



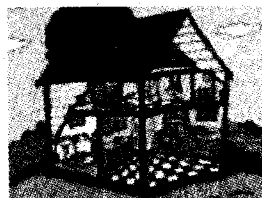
Hình 28



Hình 29



Hình 30



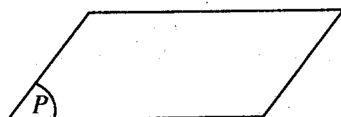
Hình 31

Môn học nghiên cứu các tính chất của những hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng gọi là Hình học không gian.

Mặt phẳng

Trang giấy, mặt bảng đen, mặt tường lớp học, mặt hồ lặng gió, mặt bàn, tấm gương phẳng, ... cho ta hình ảnh một phần mặt phẳng trong không gian.

Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành (h.32) và dùng một chữ cái đặt trong dấu ngoặc ( ) để đặt tên cho mặt phẳng ấy. Ví dụ : mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β) ... và viết tắt là mp(P), mp(Q), mp(α), mp(β) ... hoặc (P), (Q), (α), (β) ...



Hình 32

Điểm thuộc mặt phẳng

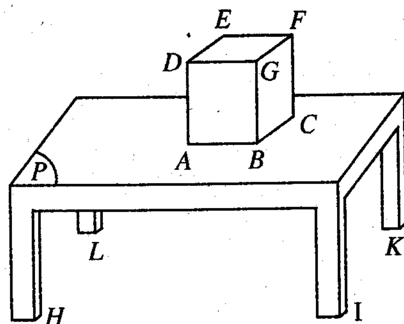
Ta biết rằng khi cho điểm A và đường thẳng a thì hoặc điểm A thuộc đường thẳng a, hoặc điểm A không thuộc đường thẳng a.

Tương tự như vậy, với một điểm A và một mặt phẳng (P), cũng có hai khả năng xảy ra :

– Hoặc điểm A thuộc mp(P), khi đó ta kí hiệu $A \in$ mp(P) hay $A \in (P)$.

– Hoặc điểm A không thuộc mp(P), ta còn nói điểm A ở ngoài mp(P) và kí hiệu $A \notin$ mp(P) hay $A \notin (P)$.

?1 *Hãy quan sát hình 33. Xem mặt bàn là một phần của mặt phẳng (P). Trong các điểm A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, điểm nào thuộc mặt phẳng (P) và điểm nào không thuộc mặt phẳng (P) ?*

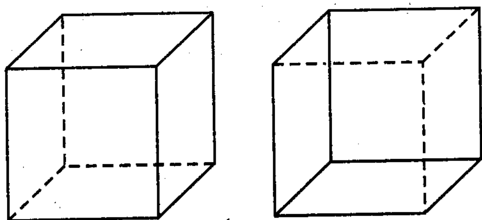


Hình 33

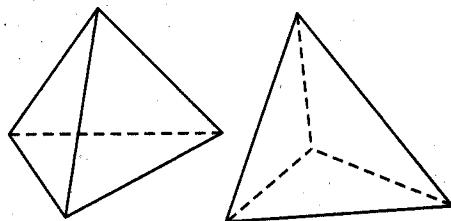
Khi điểm A thuộc mặt phẳng (P), ta còn nói : "*điểm A nằm trên mặt phẳng* (*P*)" hay "*điểm A nằm trong mặt phẳng* (*P*)", hoặc còn nói "*mặt phẳng* (*P*) *đi qua điểm A*" hay "*mặt phẳng* (*P*) *chứa điểm A*".

Hình biểu diễn của một hình trong không gian

Hình lập phương là hình nằm trong không gian, nó có sáu mặt là hình vuông. Hình tứ diện cũng là hình nằm trong không gian, nó có bốn mặt là tam giác. Để dễ hình dung, người ta tìm cách vẽ chúng thành những hình phẳng, gọi là ***hình biểu diễn*** của các hình không gian đó.



Hai hình biểu diễn của hình lập phương
Hình 34



Hai hình biểu diễn của hình tứ diện
Hình 35

Hình lập phương, hình tứ diện không phải là những hình phẳng nhưng các hình biểu diễn của chúng được vẽ trên mặt phẳng. Tuy thế, các hình biểu diễn cũng tạo cho chúng ta cảm giác như đang nhìn thấy hình lập phương, hình tứ diện.

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, người ta đưa ra những quy tắc thường được áp dụng như :

– *Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.*

– Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).

– Điểm A thuộc đường thẳng a được biểu diễn bởi một điểm A' thuộc đường thẳng a', trong đó a' biểu diễn cho đường thẳng a.

– Dùng nét vẽ liền (—) để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - -) để biểu diễn cho những đường bị khuất.

Các quy tắc khác, chúng ta sẽ được học sau.



1

Vẽ hình biểu diễn của mp(P) và một đường thẳng a xuyên qua nó.



2

Vẽ một số hình biểu diễn của hình tứ diện. Có thể vẽ hình biểu diễn của hình tứ diện mà không có nét đứt đoạn nào hay không ?

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Do thực tiễn, kinh nghiệm và quan sát, người ta thừa nhận một số tính chất sau đây của hình học không gian.

Tính chất thừa nhận 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

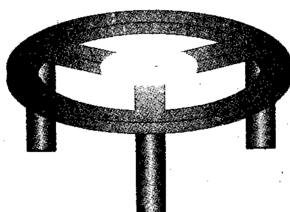
Như vậy, hai điểm phân biệt A, B xác định duy nhất một đường thẳng. Đường thẳng đó được kí hiệu là đường thẳng AB hoặc ngắn gọn là AB.

Tính chất thừa nhận 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Như vậy, ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định duy nhất một mặt phẳng. Mặt phẳng đó được kí hiệu là mặt phẳng (ABC) hay mp(ABC) hay ngắn gọn là (ABC).

Trong thực tế, kiềng ba chân hoặc các giá đỡ ba chân khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh vì theo tính chất thừa nhận 2, ba điểm không thẳng hàng nào cũng xác định một mặt phẳng.



Kiềng ba chân
Hình 36



Giá đỡ ba chân
Hình 37

Tính chất thừa nhận 3

> *Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

Nếu có nhiều điểm thuộc một mặt phẳng thì ta nói rằng các điểm đó ***đồng phẳng***, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói rằng chúng ***không đồng phẳng***.

Như vậy, tính chất thừa nhận 3 có thể được phát biểu như sau : *Tồn tại bốn điểm không đồng phẳng.*



3

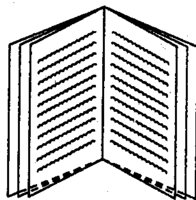
Giả sử (P) là một mặt phẳng nào đó. Chứng minh rằng có ít nhất một điểm không thuộc mp(P).

Tính chất thừa nhận 4

> *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

Giả sử (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung A. Theo tính chất thừa nhận 4 thì (P) và (Q) có đường thẳng chung duy nhất a đi qua điểm A. Đường thẳng a đó được gọi là ***giao tuyến của hai mặt phẳng*** (P) và (Q), còn nói hai mặt phẳng (P) và (Q) ***cắt nhau*** theo giao tuyến a, kí hiệu $a = (P) \cap (Q)$.

?2 *Quyển vở ghi bài đang ở trước mặt các em* (h.38). *Hai bìa vở là hình ảnh của hai mặt phẳng phân biệt. Vậy giao tuyến của chúng là gì ?*


Hình 38

Tính chất thừa nhận 5

> *Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.*

Ta sẽ thấy rằng trong không gian có nhiều mặt phẳng khác nhau. Tính chất thừa nhận 5 khẳng định rằng trong bất kì mặt phẳng nào, ta đều có thể áp dụng các kết quả của hình học phẳng.

Trên đây là các tính chất được thừa nhận mà không chứng minh. Tiếp theo là ví dụ về một định lí được chứng minh dựa vào một số tính chất đó.

ĐỊNH LÍ

> *Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.*

Chứng minh. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt của mặt phẳng (P), Δ là đường thẳng đi qua A và B.

Theo tính chất thừa nhận 5, trong mặt phẳng (P) có một đường thẳng Δ' đi qua A và B. Theo tính chất thừa nhận 1 thì Δ trùng với Δ', do đó Δ nằm trong mp(P). □

Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) thì ta còn nói *a nằm trên* (P), hoặc (P) *đi qua a*, hoặc (P) *chứa a* và kí hiệu là $a \subset (P)$, hoặc $(P) \supset a$.

?3 *Muốn xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt thì ta phải tìm bao nhiêu điểm chung của chúng ?*

 **4**

Trong mp(P) cho tứ giác lồi $ABCD$ có các cạnh AB và CD không song song ; ngoài mp(P) cho một điểm S. Hãy tìm giao tuyến của :

a) Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) ;

b) Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Ví dụ 1

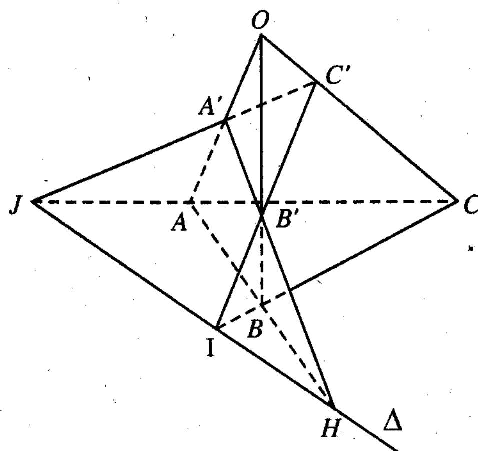
Cho bốn điểm O, A, B, C, không đồng phẳng. Trên các đường thẳng OA, OB, OC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác O sao cho các đường thẳng sau đây cắt nhau : BC và B'C', CA và C'A', AB và A'B'.

a) Hãy xác định giao điểm của mỗi đường thẳng A'B', B'C', C'A' với mp(ABC).

b) Chứng minh rằng các giao điểm trên thẳng hàng.

Giải (h.39)

a) Giả sử đường thẳng $A'B'$ cắt đường thẳng AB tại điểm H. Khi đó điểm H thuộc cả hai đường thẳng $A'B'$ và AB. Mặt khác, đường thẳng AB nằm trong mp(ABC) nên H chính là giao điểm của đường thẳng $A'B'$ với mp(ABC).



Hình 39

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của các đường thẳng $B'C'$ và BC, $C'A'$ và CA thì I, J theo thứ tự chính là giao điểm của $B'C'$, $C'A'$ với mp(ABC).

b) Theo câu a), ta có H, I, J lần lượt thuộc các đường thẳng $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ nên chúng cùng thuộc mp($A'B'C'$). Mặt khác H, I, J cùng thuộc mp(ABC). Theo tính chất thừa nhận 4, ba điểm H, I, J thuộc giao tuyến Δ của hai mặt phẳng phân biệt ($A'B'C'$) và (ABC) nên chúng phải thẳng hàng. □



CHÚ Ý 1

Qua ví dụ trên, ta thấy :

• Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P), ta tìm một đường thẳng nào đó nằm trên (P) mà cắt d. Khi đó, giao điểm của hai đường thẳng này là giao điểm cần tìm.

• Muốn chứng minh các điểm thẳng hàng, ta có thể chứng tỏ rằng chúng là những điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

Ta đã biết rằng : Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng (tính chất thừa nhận 2) (h.40).

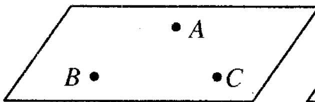
Điều này có nghĩa là

> *Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.*

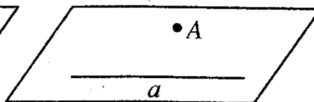
Mặt khác, nếu đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì nằm trên mặt phẳng ấy. Từ đó và từ điều kiện xác định mặt phẳng nói trên, ta còn suy ra (h.41, h.42) :

> *Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.*

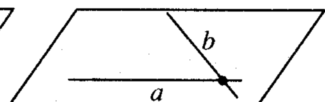
> *Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.*



Hình 40



Hình 41



Hình 42

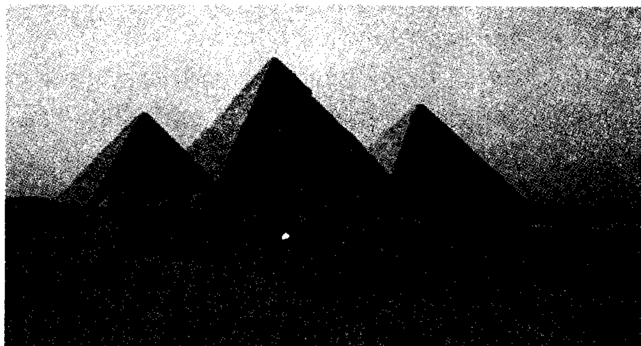
Kí hiệu

- Mặt phẳng đi qua đường thẳng a và điểm A không nằm trên a được kí hiệu là mp(a, A) hoặc mp(A, a).
- Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau a và b được kí hiệu là mp(a, b).

4. Hình chóp và hình tứ diện

Hình chóp

Các kim tự tháp Ai Cập là công trình kiến trúc hùng vĩ đã được xây dựng cách đây gần 4500 năm (h.43). Chúng gồm nhiều hình chóp. Sau đây chúng ta sẽ nói về hình chóp và các tính chất của nó.



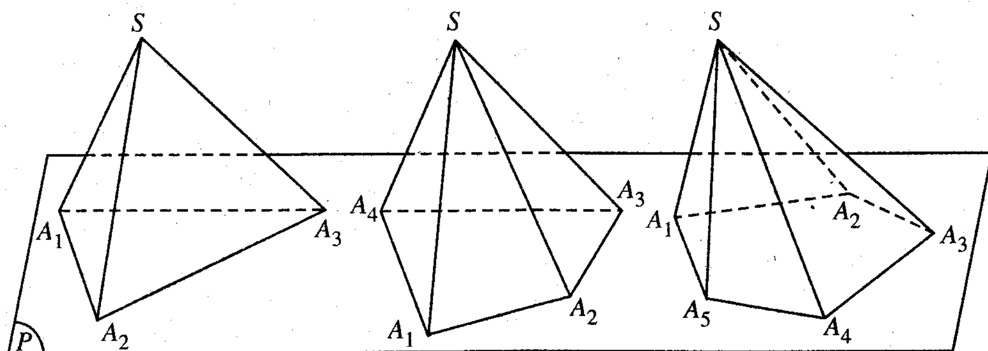
Hình 43. Kim tự tháp Ai Cập

Trước hết ta quy ước : Từ nay, khi nói đến "tam giác", ta có thể hiểu là hình gồm ba cạnh của nó hoặc là hình gồm ba cạnh và các điểm nằm trong tam giác đó. Đối với đa giác cũng như thế.

Định nghĩa

Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n để được n tam giác : SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1.

> *Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là **hình chóp** và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.*



Hình 44

Điểm S gọi là ***đỉnh*** của hình chóp. Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là ***mặt đáy*** của hình chóp. Các cạnh của mặt đáy gọi là các ***cạnh đáy*** của hình chóp. Các đoạn thẳng SA_1, SA_2, ..., SA_n gọi là các ***cạnh bên*** của hình chóp. Mỗi tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 gọi là một ***mặt bên*** của hình chóp. Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là ***hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác*** (h.44), ...



5

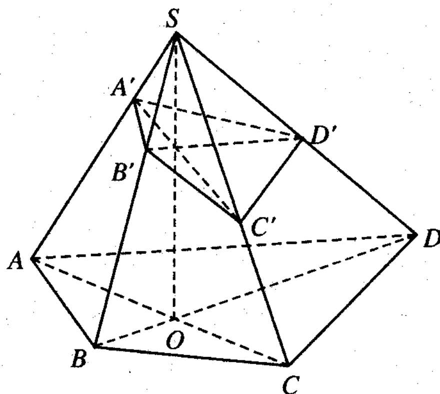
a) Có hình chóp nào mà số cạnh (cạnh bên và cạnh đáy) của nó là số lẻ không ? Tại sao ?

b) Hình chóp có 16 cạnh thì có bao nhiêu mặt ?



6

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'.



Hình 45

Chứng minh rằng các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$ và SO đồng quy (O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của đáy) (h.45).

Ví dụ 2

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD với hai đường thẳng AB và CD cắt nhau. Gọi A' là một điểm nằm giữa hai điểm S và A. Hãy tìm các giao tuyến của mp(A'CD) với các mặt phẳng (ABCD), (SAB), (SBC), (SCD), (SDA).

Giải (h.46)

Cách 1. Áp dụng kết quả của hoạt động 6 ở trên, ta có mặt phẳng $(A'CD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C, D thì B' là giao điểm của đường thẳng DI với cạnh SB (ở đây I là giao điểm của hai đường thẳng SO và CA').

Từ đó dễ thấy :

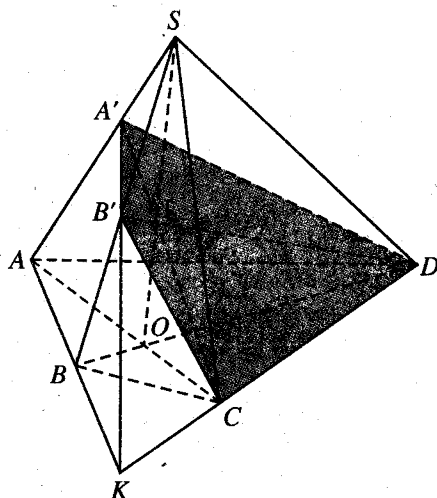
$(ABCD) \cap (A'CD) = CD$;

$(SAB) \cap (A'CD) = A'B'$;

$(SBC) \cap (A'CD) = CB'$;

$(SCD) \cap (A'CD) = CD$;

$(SDA) \cap (A'CD) = DA'$.



Hình 46

Cách 2. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD thì rõ ràng giao tuyến của mp$(A'CD)$ và mp(SAB) là đường thẳng $A'K$. Khi ấy giao điểm B' của mp$(A'CD)$ và cạnh bên SB của hình chóp chính là giao điểm của đường thẳng $A'K$ và SB. Từ đó ta tìm ra các giao tuyến của các mặt phẳng chứa các mặt còn lại của hình chóp với mp$(A'CD)$. □

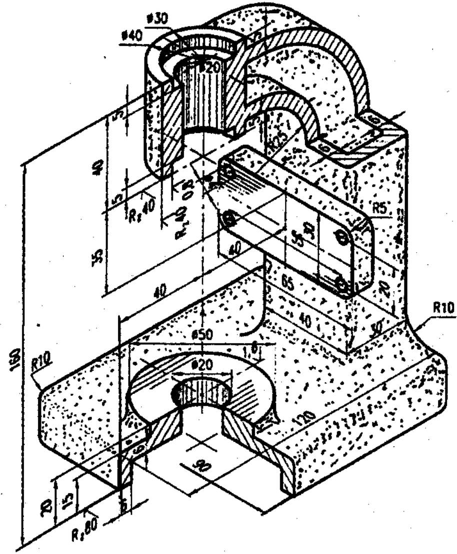


CHÚ Ý 2

Tứ giác $A'B'CD$ có các cạnh nằm trên những giao tuyến của mặt phẳng $(A'CD)$ với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Tứ giác đó được gọi là *thiết diện* (hay *mặt cắt*) của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp$(A'CD)$.

Nói một cách đơn giản : ***Thiết diện*** (hay ***mặt cắt***) của hình $\mathscr{H}$ khi cắt bởi mp(P) là phần chung của mp(P) và hình $\mathscr{H}$.

Khi xây dựng một ngôi nhà, chế tạo một cỗ máy, ..., để thể hiện hình dạng bên trong của chúng, người thiết kế đã dùng những mặt phẳng cắt để mô tả những thiết diện của chúng trên bản vẽ (h.47).



Hình 47. Thiết diện của thân máy ▸

Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là ***hình tứ diện*** (hay ngắn gọn là ***tứ diện***) và được kí hiệu là $ABCD$. Các điểm A, B, C, D gọi là các ***đỉnh*** của tứ diện. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các ***cạnh*** của tứ diện. Hai cạnh không có điểm chung gọi là ***hai cạnh đối diện***. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các ***mặt*** của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là ***đỉnh đối diện với mặt*** đó.

?4 *Một tứ diện ABCD có thể coi là hình chóp tam giác bằng bao nhiêu cách ? Hãy nói cụ thể mỗi cách.*

Đặc biệt, hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều được gọi là ***hình tứ diện đều***.

?5 *Các cạnh của hình tứ diện đều có bằng nhau hay không ?*

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước ;

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước ;

c) Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.

2. Em hãy giải thích vì sao các đồ vật có bốn chân như bàn, ghế, ... thường dễ bị cập kênh.

3. Với một cái thước thẳng, làm thế nào để phát hiện một mặt bàn có phẳng hay không ? Nói rõ căn cứ vào đâu mà ta làm như vậy.

4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Chứng minh rằng nếu a và b cắt nhau thì giao điểm phải nằm trên Δ.

5. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm không thẳng hàng A, B, C cùng nằm ngoài (P). Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng AB, BC, CA đều cắt mp(P) thì các giao điểm đó thẳng hàng.

6. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng cho trước ;

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng chứa điểm đó ;

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

7. Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

a) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cho trước ;

b) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước ;

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng đó lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau.

8. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Một đường thẳng c cắt cả a và b. Có thể kết luận rằng ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trong một mặt phẳng hay không ?

9. Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng sao cho chúng đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng chúng đồng quy.

10. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O và đường thẳng c cắt mp(a, b) ở điểm I khác O. Gọi M là điểm di động trên c và khác I. Chứng minh rằng giao tuyến của các mặt phẳng (M, a), (M, b) nằm trên một mặt phẳng cố định.

11. Cho hình bình hành $ABCD$ nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm S nằm ngoài mp(P). Gọi M là điểm nằm giữa S và A ; N là điểm nằm giữa S và B ; giao điểm của hai đường thẳng AC và BD là O.

a) Tìm giao điểm của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng SO.

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

12. Vẽ một số hình biểu diễn của một hình chóp tứ giác trong các trường hợp đáy là tứ giác lồi, đáy là hình bình hành, đáy là hình thang.

13. Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không ?

14. Dùng bìa cứng cắt và dán lại để thành :

a) Một tứ diện đều ;

b) Một hình chóp tứ giác có đáy là hình vuông và các mặt bên là những tam giác đều.

15. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với S, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp$(A'B'C')$.

16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp(SAC).

c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(ABM).

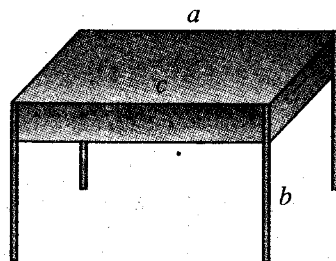
§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt

[?1] *Hãy quan sát hình 48. Ta coi các mép bàn a, c và cạnh b của chân bàn là các đường thẳng a, b, c.*

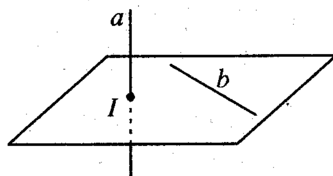
a) *Đường thẳng a và đường thẳng b có cùng nằm trên một mặt phẳng hay không ?*

b) *Có mặt phẳng nào chứa hai đường thẳng a và c hoặc chứa hai đường thẳng b và c hay không ?*



Hình 48

Như vậy, khi cho hai đường thẳng phân biệt *a* và *b* trong không gian thì có thể xảy ra hai trường hợp :

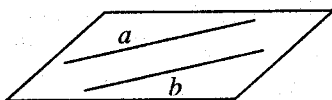


Hình 49

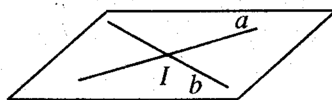
a) Không có mặt phẳng nào chứa cả *a* và *b*. Khi đó ta nói rằng hai đường thẳng *a* và *b chéo nhau* (h.49).

b) Có mặt phẳng chứa cả *a* và *b*. Khi đó ta nói rằng chúng *đồng phẳng*. Trong trường hợp này, theo kết quả của hình học phẳng, có hai khả năng xảy ra :

i) *a* và *b* không có điểm chung. Khi đó ta nói rằng chúng *song song với nhau* (hoặc chúng *song song*) và kí hiệu $a \parallel b$ (h.50).



Hình 50



Hình 51

ii) *a* và *b* có một điểm chung duy nhất. Khi đó ta nói rằng chúng *cắt nhau*. Nếu điểm chung của chúng là *I*, ta nói rằng chúng *cắt nhau tại I* hoặc *I* là *giao điểm* của chúng và viết $a \cap b = \{I\}$ hoặc $a \cap b = I$ (h.51).

ĐỊNH NGHĨA

Hai đường thẳng gọi là ***đồng phẳng*** *nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.*

Hai đường thẳng gọi là ***chéo nhau*** *nếu chúng không đồng phẳng.*

Hai đường thẳng gọi là ***song song*** *nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.*


1

Cho tứ diện *ABCD*. Hãy xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng *AB* và *CD*.


2

Cho hai đường thẳng *a* và *b* chéo nhau. Có hay không hai đường thẳng *p*, *q* song song với nhau, mỗi đường đều cắt cả *a* và *b* ?

2. Hai đường thẳng song song

Dựa vào tiên đề Ơ-clít về đường thẳng song song trong mặt phẳng, ta có thể chứng minh được các tính chất sau đây

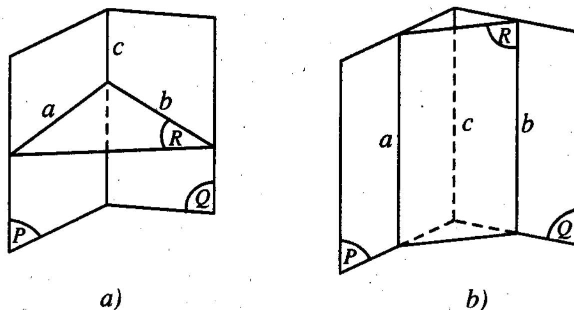
Tính chất 1

> *Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.*

Tính chất 2

> *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Giả sử (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt a, b, c, trong đó : $a = (P) \cap (R)$, $b = (Q) \cap (R)$, $c = (P) \cap (Q)$ (h.52).



Hình 52

?2 *Có những vị trí tương đối nào giữa hai giao tuyến a và b ?*



3

Dùng kết quả bài tập 4 của §1, hãy chứng tỏ rằng ba giao tuyến a, b, c hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Từ đó ta có định lí sau đây :

ĐỊNH LÍ (về giao tuyến của ba mặt phẳng)

> *Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.*

HỆ QUẢ

> *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).*



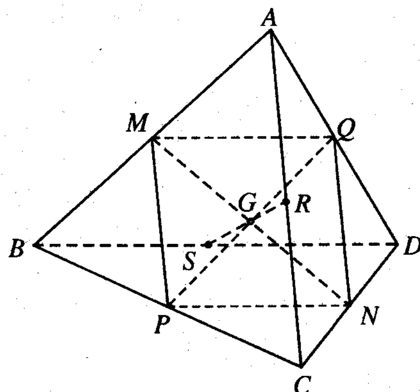
4

Hãy sử dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng để chứng minh hệ quả trên.

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, BC, DA, AC, BD.*

*Chứng minh ba đoạn thẳng MN, PQ và RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là **trọng tâm của tứ diện** ABCD đã cho (h.53).*



Hình 53

Giải

Vì MP là đường trung bình của tam giác ABC, NQ là đường trung bình của tam giác ADC nên MP // AC, NQ // AC, $MP = \frac{1}{2}AC$, $NQ = \frac{1}{2}AC$. Vậy MP // NQ và $MP = NQ$, do đó tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó, ta suy ra các đoạn thẳng MN và PQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Chứng minh tương tự, các đoạn thẳng MN và RS cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Vậy, ba đoạn thẳng MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn thẳng đó. □

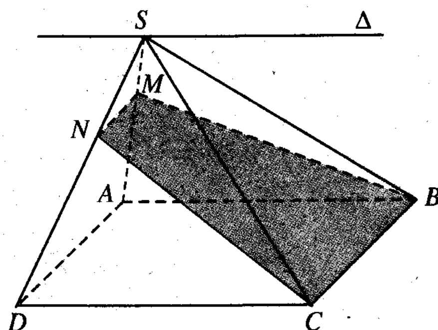
Ví dụ 2. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành.*

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (MBC), trong đó M là một điểm nằm giữa hai điểm S và A.

Giải (h.54)

a) mp(SAB) và mp(SCD) có điểm chung S và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song AB và CD nên chúng cắt nhau theo giao tuyến Δ đi qua S và song song với AB và CD.



Hình 54

b) mp(MBC) và mp(SAD) lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD và có điểm chung M nên giao tuyến của chúng là đường thẳng MN

song song với AD ($N \in SD$). Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(MBC) là hình thang $MNCB$. □

Câu hỏi và bài tập

17. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung ;

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau ;

c) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau ;

d) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MQ, NP và vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ.

19. Cho tứ diện $ABCD$. Bốn điểm P, Q, R, S lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng

a) Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy ;

b) Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PS, RQ, BD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

20. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mp(PQR) với cạnh AD nếu :

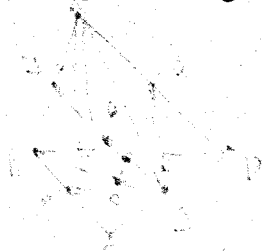
a) $PR \parallel AC$;　　　b) PR cắt AC.

21. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mp(PQR) và cạnh AD. Chứng minh rằng $AS = 2SD$.

22. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.

b) Gọi A' là trọng tâm của mặt BCD. Chứng minh rằng $GA = 3GA'$.



§3 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

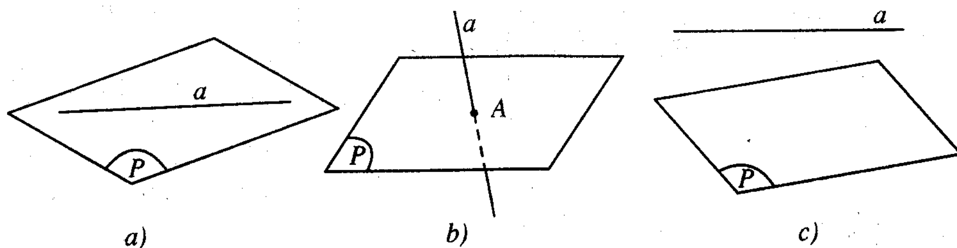
1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho một đường thẳng a và một mặt phẳng (P). Ta thấy có ba trường hợp sau đây xảy ra :

a) Đường thẳng a và mp(P) có hai điểm chung phân biệt. Khi đó, theo định lí ở §1, đường thẳng a nằm trên mp(P), tức là $a \subset$ mp(P) (h.55a).

b) Đường thẳng a và mp(P) có một điểm chung duy nhất A. Khi đó ta nói a và (P) cắt nhau tại A và viết $a \cap (P) = \{A\}$ hoặc $a \cap (P) = A$ (h.55b).

c) Đường thẳng a và mp(P) không có điểm chung nào cả. Khi đó ta nói rằng *đường thẳng a song song với mặt phẳng* (P), hoặc *mặt phẳng* (P) *song song với đường thẳng a*, hoặc *a và* (P) *song song với nhau*, và viết $a \parallel (P)$ hoặc $(P) \parallel a$ (h.55c).



Hình 55

Vậy ta có định nghĩa sau đây

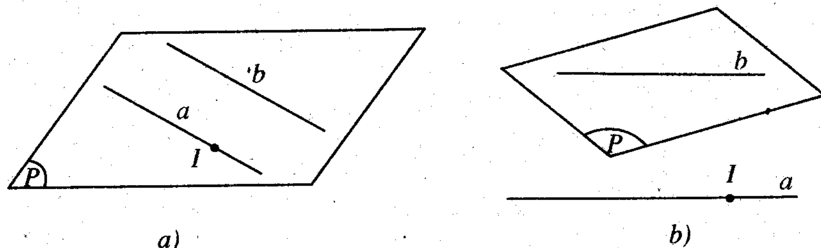
ĐỊNH NGHĨA

> *Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là* ***song song với nhau*** *nếu chúng không có điểm chung.*

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Nhận xét

Cho đường thẳng b nằm trong mp(P) và một đường thẳng a song song với b. Lấy một điểm I tuỳ ý trên a. Khi đó, nếu I thuộc (P) thì a nằm trong (P) ; nếu I không thuộc (P) thì a song song với (P) (h.56).



Hình 56

Vậy ta có định lí sau đây

ĐỊNH LÍ 1

Nếu đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên (P) thì a song song với (P).

3. Tính chất

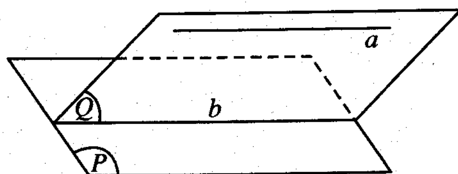
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Khi đó, đường thẳng a có song song với đường thẳng nào nằm trên (P) hay không ? Định lí sau đây giúp ta thấy rõ điều đó.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.



1 (Để chứng minh định lí 2)
Hãy vẽ qua a một mặt phẳng (Q) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến b rồi dùng phương pháp phản chứng để chứng minh b song song với a (h.57).



Hình 57

HỆ QUẢ 1

Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

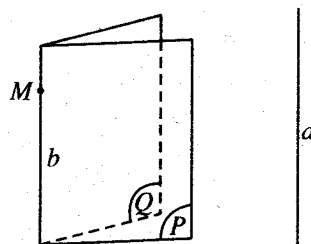
HỆ QUẢ 2

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.



2 (Để chứng minh hệ quả 2)

Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cùng song song với một đường thẳng a và $(P) \cap (Q) = b$. Lấy một điểm M nằm trên b. Hãy chứng minh rằng các giao tuyến của mp(M, a) với hai mặt phẳng (P) và (Q) đều trùng với b và từ đó suy ra kết luận của hệ quả (h.58).



Hình 58

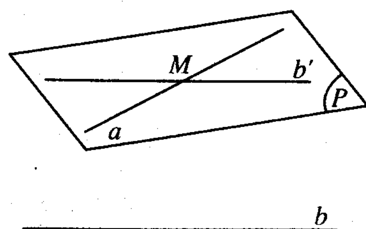
ĐỊNH LÍ 3

Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b.

Chứng minh

Lấy một điểm M nằm trên a. Kẻ qua M một đường thẳng b' song song với b (h.59). Khi đó, theo định lí 1, hai đường thẳng a và b' xác định mp(P) song song với b.

Nếu có mặt phẳng (Q) khác (P) cũng đi qua a và song song với b thì theo hệ quả 2, a là giao tuyến của (P) và (Q) nên $a \parallel b$, trái với giả thiết. Vậy mp(P) là duy nhất. □



Hình 59

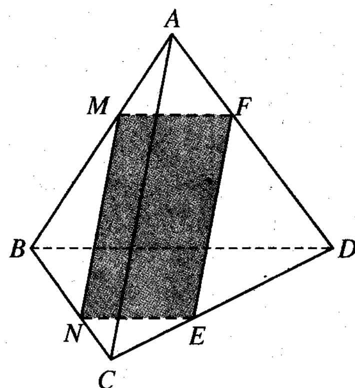
Ví dụ

Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh AB (M khác A và B). Giả sử (P) là mặt phẳng qua M song song với các đường thẳng AC và BD. Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì ?

Giải (h.60)

Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại N và kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD tại F. Khi ấy, (P) chính là mp(MNF). Gọi E là

giao điểm của (P) với CD thì thiết diện là tứ giác $MNEF$. Vì đường thẳng MN song song với mp(ACD) nên mp(P) qua MN cắt mp(ACD) theo giao tuyến EF song song với MN. Tương tự, NE song song với MF. Vậy thiết diện cần tìm là hình bình hành $MNEF$. □



Hình 60

Câu hỏi và bài tập

23. Cho hai đường thẳng a và b cùng song song với mp(P). Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?

a) a và b song song với nhau ; b) a và b chéo nhau ;

c) a và b có thể cắt nhau ; d) a và b trùng nhau.

e) Các mệnh đề a), b), c), d) đều sai.

24. Cho mp(P) và hai đường thẳng song song a, b. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây ?

a) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b ;

b) Nếu (P) song song với a thì (P) song song với b hoặc chứa b ;

c) Nếu (P) song song với a thì (P) chứa b ;

d) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b ;

e) Nếu (P) cắt a thì (P) có thể song song với b ;

f) Nếu (P) chứa a thì (P) có thể song song với b.

25. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Xét vị trí tương đối của đường thẳng MN và mp(BCD).

b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (DBC). Xét vị trí tương đối của d và mp(ABC).

26. Khi cắt tứ diện bằng một mặt phẳng thì thiết diện nhận được có thể là những hình nào sau đây ?

a) Hình thang ; b) Hình bình hành ; c) Hình thoi.

27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì ?

28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA.

§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Trong không gian cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q).

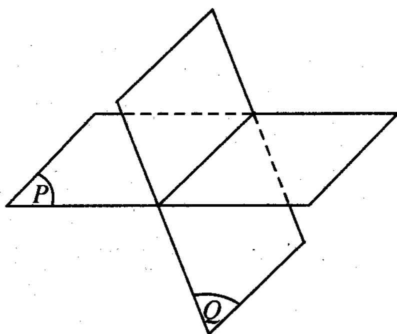
?1 *Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có thể có ba điểm chung không thẳng hàng hay không ?*

?2 *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) có một điểm chung thì chúng có bao nhiêu điểm chung ? Các điểm chung đó có tính chất như thế nào ?*

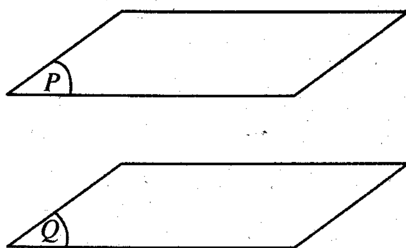
Như vậy khi cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q), có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau đây :

a) (P) và (Q) có điểm chung. Khi đó ta biết rằng (P) và (Q) cắt nhau theo một đường thẳng (h.61a).

b) (P) và (Q) không có điểm chung. Trong trường hợp này, ta nói chúng *song song với nhau* (hoặc *song song*) (h.61b) và kí hiệu $(P) // (Q)$, hay $(Q) // (P)$.



a)



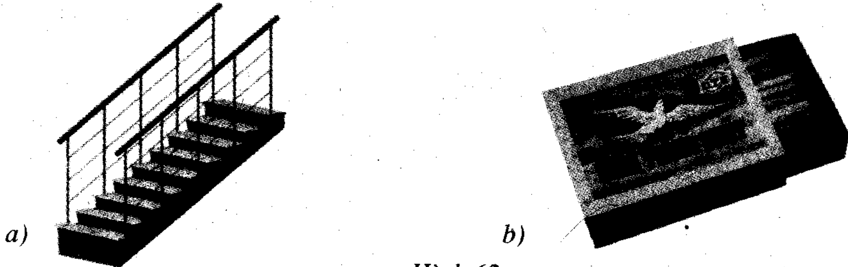
b)

Hình 61

ĐỊNH NGHĨA

Hai mặt phẳng gọi là ***song song*** *nếu chúng không có điểm chung.*

Trong thực tế, chúng ta thường gặp hình ảnh của những mặt phẳng song song : các bậc cầu thang (h.62a), hai mặt đối diện của hộp diêm (h.62b), ...



Hình 62

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q).

?3 *Khẳng định sau đây có đúng không ? Vì sao ?*

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trên (P) đều song song với (Q).

?4 *Khẳng định sau đây có đúng không ? Tại sao ?*

Nếu mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

Bây giờ, nếu chỉ biết trong mp(P) có hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mp(Q) thì (P) có song song với (Q) hay không ? Định lí sau đây trả lời câu hỏi đó.

ĐỊNH LÍ 1

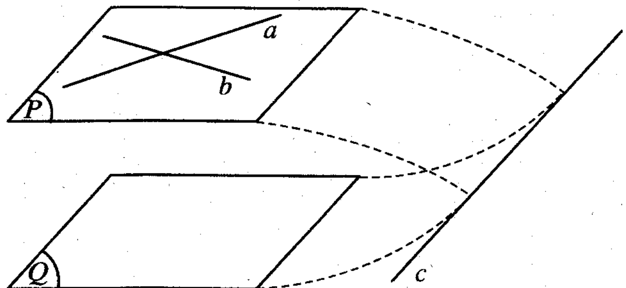
Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).



1 (Để chứng minh định lí 1)

a) Hãy chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) không trùng nhau.

b) Giả sử (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến c. Hãy chứng tỏ rằng $a \parallel c$, $b \parallel c$ và do đó suy ra điều vô lí (h.63).



Hình 63

3. Tính chất

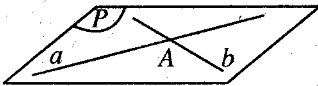
Ta biết rằng : Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó. Bây giờ nếu ta thay cụm từ "đường thẳng" trong mệnh đề trên bởi cụm từ "mặt phẳng", ta cũng có các tính chất tương tự như sau :

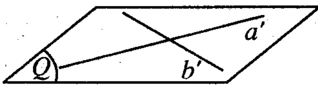
Tính chất 1

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Chứng minh

Giả sử A là một điểm nằm ngoài mp(Q). Trên (Q), lấy hai đường thẳng a' và b' cắt nhau. Gọi a và b là hai đường thẳng qua A và lần lượt song song với a' và b' . Theo định lí 1, hai đường thẳng a và b xác định mp(P) song song với mp(Q) (h.64).





Hình 64

Giả sử (P') cũng là một mặt phẳng qua A và song song với (Q). Khi đó, (P') song song với a' và b', do đó (P') phải chứa a và b. Vậy (P) và (P') trùng nhau. □

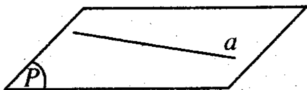
Từ tính chất trên, ta suy ra hai hệ quả sau (h.65)

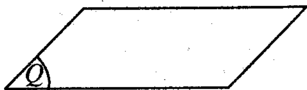
HỆ QUẢ 1

Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với (Q).

HỆ QUẢ 2

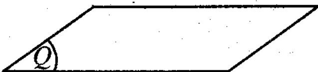
Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.





a)





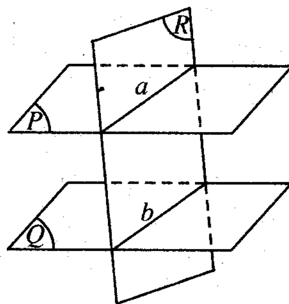


b)

Hình 65

?5 *Cho mp(R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a và b. Hỏi a và b có điểm chung hay không ? Tại sao ? (h.66)*

Trả lời câu hỏi trên, ta được tính chất sau đây



Hình 66

Tính chất 2

> *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.*

4. Định lí Ta-lét (Thalès) trong không gian

Ở cấp THCS, các em đã học định lí Ta-lét trong mặt phẳng nói về những đường thẳng song song. Bây giờ chúng ta sẽ học một định lí nói về những mặt phẳng song song cũng mang tên nhà toán học Hy Lạp : Ta-lét. Định lí ấy được phát biểu như sau


Thalès (624 - 547 TCN)

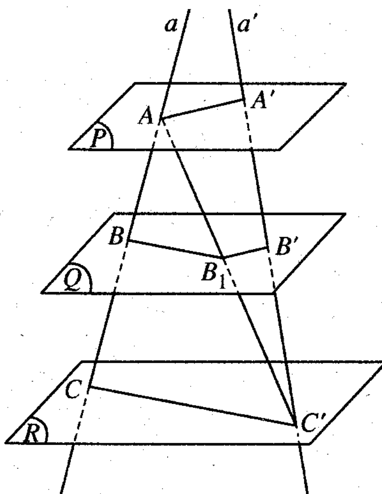
ĐỊNH LÍ 2 (Định lí Ta-lét)

> *Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

Định lí trên có nghĩa là : Nếu ba mặt phẳng đôi một song song (P), (Q), (R) cắt hai đường thẳng a và a' lần lượt tại A, B, C và A', B', C' thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Để chứng minh định lí, gọi B_1 là giao điểm của AC' và mp(Q) rồi áp dụng định lí Ta-lét trong mặt phẳng (ACC') và trong mặt phẳng $(C'AA')$.



Hình 67

Ta thừa nhận định lí sau đây, thường gọi là định lí Ta-lét đảo.

ĐỊNH LÍ 3 (Định lí Ta-lét đảo)

Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và a' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Ví dụ

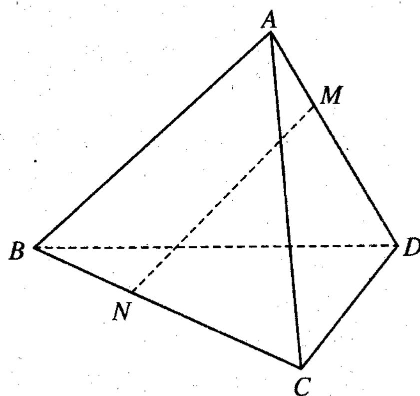
Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N theo thứ tự chạy trên các cạnh AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$. Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Giải (h.68)

Vì M, N lần lượt nằm trên các đoạn thẳng AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$ nên suy ra

$$\frac{MA}{NB} = \frac{MD}{NC} = \frac{AD}{BC}.$$

Vậy theo định lí Ta-lét đảo, các đường thẳng MN, AB, CD cùng song song với một mặt phẳng (P) nào đó. Ta có thể lấy mp(P) đi qua một điểm cố định, song song với AB và CD ; rõ ràng (P) cố định. □



Hình 68

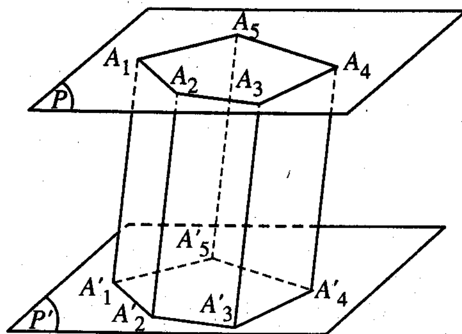
5. Hình lăng trụ và hình hộp

Trong cuộc sống hàng ngày, ta thường gặp nhiều đồ dùng, vật thể có hình dạng hình lăng trụ hay hình hộp như : hộp diêm, hộp phấn, cây thước, quyển sách, ...

Định nghĩa hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song. Trên (P) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau

và lần lượt cắt mp(P') tại A'_1, A'_2, ..., A'_n (h.69). Dễ dàng thấy rằng các tứ giác $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ là những hình bình hành và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

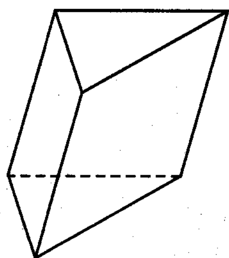


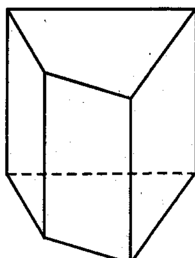
Hình 69

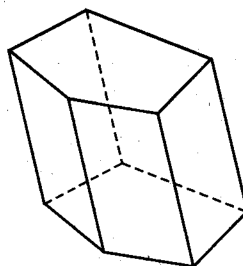
*Hình hợp bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là **hình lăng trụ** hoặc **lăng trụ**, và kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.*

Mỗi hình bình hành nói trên gọi là một ***mặt bên*** của hình lăng trụ. Hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là hai ***mặt đáy*** của hình lăng trụ. Các cạnh của hai đa giác đó gọi là các ***cạnh đáy*** ; các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$ gọi là các ***cạnh bên*** của hình lăng trụ. Các đỉnh của hai mặt đáy gọi là các ***đỉnh*** của hình lăng trụ.

Nếu đáy của hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác thì lăng trụ tương ứng được gọi là ***lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác*** (h.70).


a) Lăng trụ tam giác


b) Lăng trụ tứ giác


c) Lăng trụ ngũ giác

Hình 70

Sau đây, ta sẽ giới thiệu một dạng đặc biệt của hình lăng trụ, đó là hình hộp.

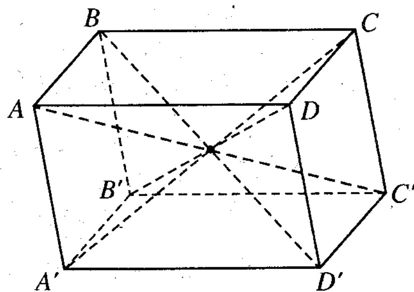
*Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là **hình hộp**.*

Như vậy, hình hộp có sáu mặt (bốn mặt bên và hai mặt đáy) đều là những hình bình hành (h.71). Mỗi mặt có một mặt song song với nó. Hai mặt như thế gọi là ***hai mặt đối diện***.

?6 *Có thể xem hai mặt đối diện nào đó của hình hộp là hai mặt đáy của nó hay không ?*

Hình hộp có tám đỉnh, hai đỉnh của hình hộp gọi là ***hai đỉnh đối diện*** nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là ***đường chéo*** của hình hộp.

Hình 71 cho ta thấy hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cặp đỉnh đối diện là A và C', B và D', C và A', D và B', và có các đường chéo là AC', BD', CA', DB'.



Hình 71

Hình hộp có mười hai cạnh chia làm ba nhóm, mỗi nhóm gồm có bốn cạnh song song và bằng nhau. Hai cạnh gọi là ***hai cạnh đối diện*** nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên bất kì một mặt nào của hình hộp.



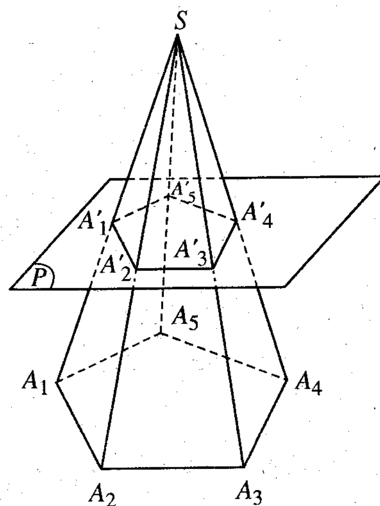
2

Chứng tỏ rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Điểm cắt nhau đó gọi là ***tâm của hình hộp***.

6. Hình chóp cụt

Định nghĩa

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình hợp bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là một ***hình chóp cụt***, kí hiệu là $A'_1A'_2...A'_n.A_1A_2...A_n$ (h.72).



Hình 72

Đáy của hình chóp gọi là ***đáy lớn*** của hình chóp cụt, còn thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là

đáy nhỏ của hình chóp cụt. Các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là các ***mặt bên*** của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$ gọi là các ***cạnh bên*** của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ..., ta có ***hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác***, ...

Tính chất

Vì hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp nên ta dễ dàng suy ra tính chất sau đây

> *Hình chóp cụt có :*
> *a) Hai đáy là hai đa giác có cạnh tương ứng song song và tỉ số các cạnh tương ứng bằng nhau.*
> *b) Các mặt bên là những hình thang.*
> *c) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.*

Câu hỏi và bài tập

29. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau ;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau ;

c) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia ;

d) Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia ;

e) Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau ;

f) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

30. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hình hộp là một hình lăng trụ ;

b) Hình lăng trụ có tất cả các cạnh song song ;

c) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau ;

d) Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành ;

e) Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau.

31. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có đúng hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.

32. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Chứng minh rằng nếu điểm M không nằm trên (P) và không nằm trên (Q) thì có duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả a và b.

33. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Một mặt phẳng cắt a, b, c, d lần lượt tại bốn điểm A', B', C', D'. Chứng minh rằng $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

34. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB. Hỏi mặt phẳng (P) qua điểm M, song song với cả AD và BC có đi qua trung điểm N của CD không ? Tại sao ? (2 cách)

35. Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\dfrac{IM}{IN} = k$, $k \neq 0$ cho trước.

36. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của cạnh $A'B'$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng CB' song song với mp(AHC'). (2 cách)

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$. Chứng minh rằng d song song với mp$(BB'C'C)$.

c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mp(H, d).

37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) mp(BDA') // mp$(B'D'C)$;

b) Đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1, G_2 của hai tam giác BDA' và $B'D'C$;

c) G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau ;

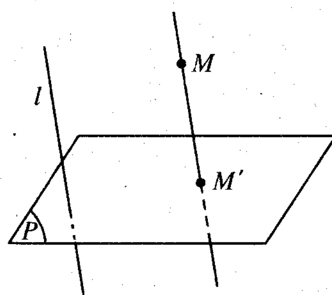
d) Các trung điểm của sáu cạnh BC, CD, DD', $D'A'$, $A'B'$, $B'B$ cùng nằm trên một mặt phẳng.

38. Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

39. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có đáy lớn ABC và các cạnh bên AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Chứng minh $MNP.M'N'P'$ là hình chóp cụt.

§5 PHÉP CHIẾU SONG SONG

1. Định nghĩa phép chiếu song song



Hình 73

Trong không gian cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt mp(P).

Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l. Đường thẳng này cắt mp(P) tại một điểm M' nào đó (h.73).

> *Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) như trên gọi là **phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l**.*

Mặt phẳng (P) gọi là ***mặt phẳng chiếu***, đường thẳng l gọi là ***phương chiếu*** ; điểm M' gọi là ***hình chiếu song song*** (hoặc ***ảnh***) ***của điểm*** M qua phép chiếu song song nói trên.

Cho hình $\mathscr{H}$. Tập hợp $\mathscr{H}'$ gồm hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc $\mathscr{H}$ gọi là ***hình chiếu song song*** (hoặc ***ảnh***) ***của hình*** $\mathscr{H}$ qua phép chiếu nói trên.

Bóng trên mặt đất phẳng của một vật chính là hình chiếu song song của vật ấy trên mặt đất (các tia sáng mặt trời được coi như song song với nhau).

?1 *Nếu điểm M thuộc mặt phẳng chiếu (P) thì hình chiếu song song của nó là điểm nào ?*

?2 *Cho đường thẳng a song song với phương chiếu l. Hình chiếu song song của a (hoặc một phần của nó) là hình nào ?*

2. Tính chất

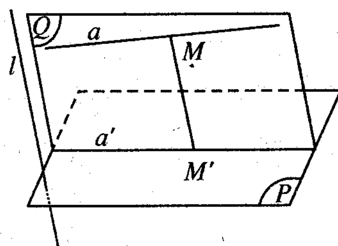
Trong các tính chất dưới đây của phép chiếu song song theo phương l, ta chỉ xét hình chiếu song song của *các đoạn thẳng hoặc đường thẳng không song song và không trùng với l.*

Tính chất 1

Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng.

Chứng minh (h.74)

Xét phép chiếu song song lên mp(P) theo phương l. Giả sử a là một đường thẳng không song song và không trùng với l. Gọi M là một điểm bất kì của a và M' là hình chiếu của nó. Vì MM' song song (hoặc trùng) với l nên M' nằm trên mp(Q) đi qua a và song song với l (hoặc chứa l). Mặt khác, M' nằm trên mp(P). Vậy M' nằm trên giao tuyến a' của hai mặt phẳng (P) và (Q).



Hình 74

Ngược lại, dễ thấy mỗi điểm M' nằm trên a' là hình chiếu của một điểm M nằm trên a. Vậy hình chiếu của a chính là đường thẳng a'. □

?3 *Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng chiếu (P) thì hình chiếu song song của a là hình nào ?*

?4 *Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu song song của a có đi qua điểm A hay không ?*

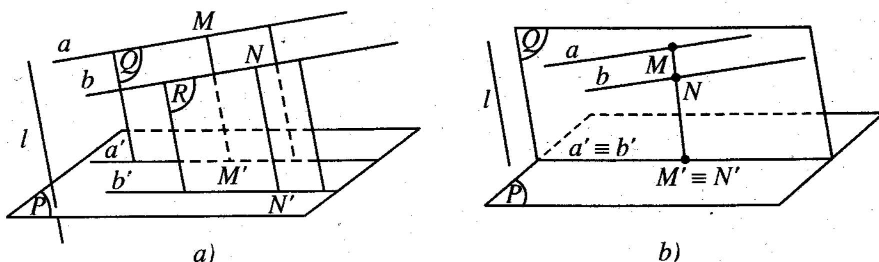
HỆ QUẢ

> *Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng, của một tia là một tia.*

Từ việc chứng minh tính chất 1, ta thấy hình chiếu song song của đường thẳng a là giao tuyến của mặt phẳng chiếu (P) và mp(Q), trong đó (Q) là mặt phẳng đi qua a và song song với l hoặc chứa l. Do đó ta có

Tính chất 2 (h.75)

> *Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*



Hình 75

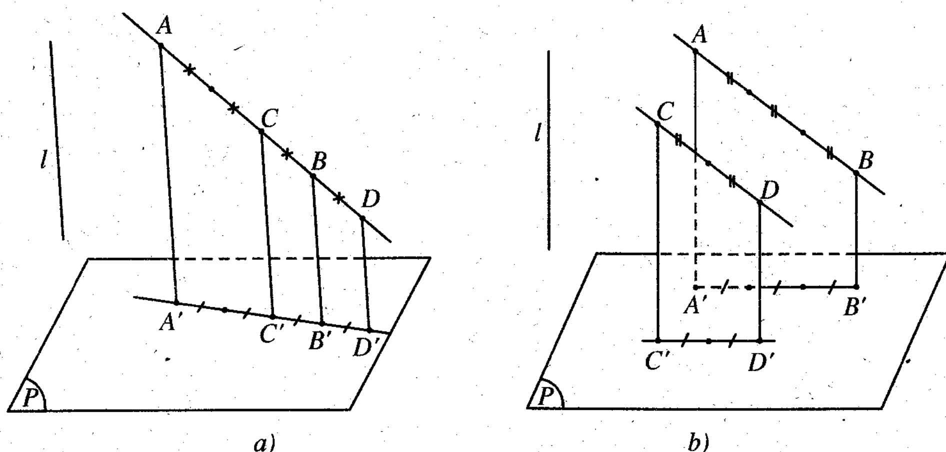
Tính chất 3

> *Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).*

Tính chất 3 có nghĩa là : Nếu AB và CD là hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) có hình chiếu song song trên mp(P) là $A'B'$ và $C'D'$ thì

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$

Hình 76 minh hoạ tính chất đó.



Hình 76

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Ở §1 của chương này, ta đã nêu ra một số quy tắc để vẽ hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng. Các quy tắc ấy dựa trên định nghĩa sau đây

ĐỊNH NGHĨA

> ***Hình biểu diễn*** *của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathscr{H}$ trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.*

Như vậy, muốn vẽ đúng hình biểu diễn, ta phải áp dụng các tính chất nói trên của phép chiếu song song. Do đó, ngoài những quy tắc đã học

trước đây (được suy từ các tính chất 1 và 2), ta cần lưu ý thêm quy tắc sau (suy từ tính chất 3) :

Nếu trên hình $\mathscr{H}$ có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng chẳng những được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau), mà tỉ số của hai đoạn thẳng này còn phải bằng tỉ số của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình $\mathscr{H}$.

?5 *Hình biểu diễn của hình bình hành là hình gì ?*



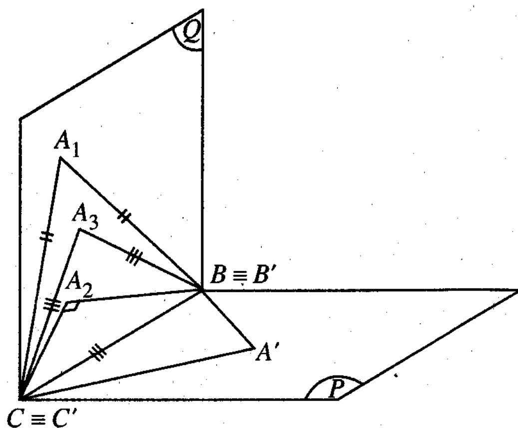
CHÚ Ý

Phép chiếu song song nói chung không giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song (hay không cùng nằm trên một đường thẳng) và không giữ nguyên độ lớn của một góc. Từ đó suy ra nếu trên hình $\mathscr{H}$ có hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song thì tỉ số của chúng không nhất thiết phải giữ nguyên trên hình biểu diễn. Cũng như vậy, độ lớn của một góc trên hình $\mathscr{H}$ không nhất thiết được giữ nguyên trên hình biểu diễn.

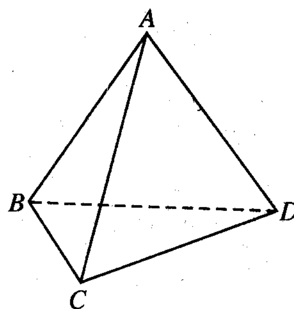
?6 *Hình biểu diễn của hình thang là hình gì ?*

?7 *Hình biểu diễn của hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông là hình gì ?*

?8 *Có phải một tam giác bất kì đều có thể xem là hình biểu diễn của tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều hay không ? (h.77).*



Hình 77



Hình 78

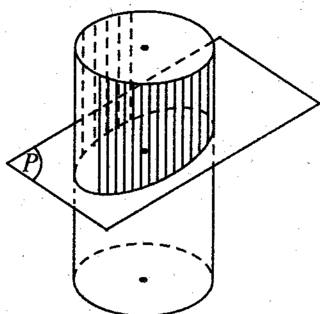
?9 *Hình biểu diễn của một tứ diện đều có thể vẽ như hình 78 hay không ?*

Hình biểu diễn của một đường tròn

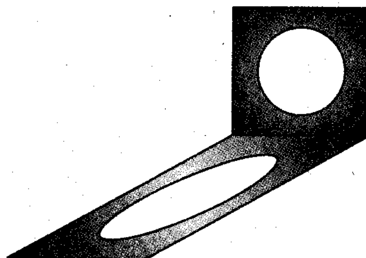
Người ta chứng minh được rằng :

> *Hình chiếu song song của một đường tròn là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.*

Vì vậy, ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn, tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn (h.79, h.80).



Hình 79



Hình 80

 **1**

Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hãy dựng hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều đó.

 **2**

Cho một đường elip là hình biểu diễn của một đường tròn. Hãy vẽ hình biểu diễn của mỗi hình sau đây :

a) Một dây cung và đường kính vuông góc với dây cung đó của đường tròn.

b) Hai đường kính vuông góc của đường tròn.

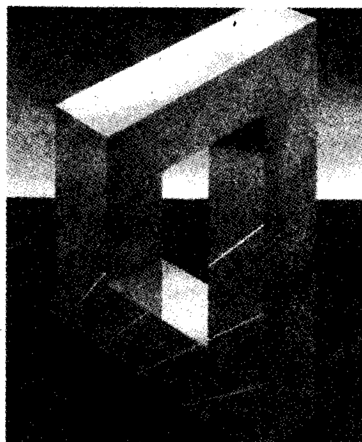
c) Một tam giác đều nội tiếp đường tròn.

Vui một chút !

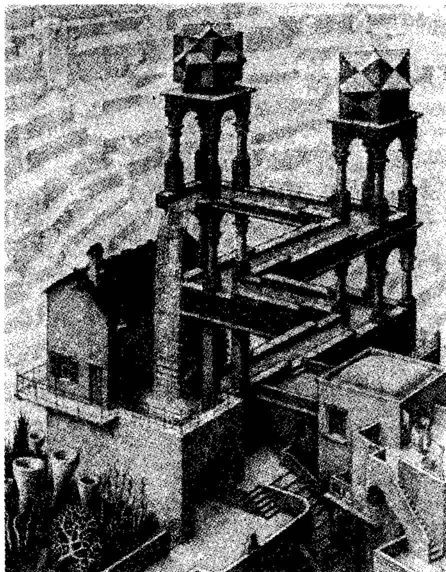


• Hình sau có phải là hình biểu diễn của một hình không gian hay không ?

Tranh của Ét-se (M.C. Escher) ▸



• *"Chuyển động vĩnh cửu ?"* : Liệu nước có chảy mãi như thế không ?



Tranh của Ét-se (M.C. Escher)

Câu hỏi và bài tập

40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau ;

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau ;

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau ;

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

41. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau ;

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau ;

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau ;

d) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu song song của nó ;

e) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó ;

f) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

42. Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

43. Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện và trọng tâm của nó.

44. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.

45. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

46. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

47. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm điểm I trên đường chéo B_1D và điểm J trên đường chéo AC sao cho $IJ \parallel BC_1$. Tính tỉ số $\frac{ID}{IB_1}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Một mặt phẳng được xác định nếu biết một trong các điều kiện sau đây :

a) Mặt phẳng đó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

b) Mặt phẳng đó đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm ấy.

c) Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

d) Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song.

e) Mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng chéo với đường thẳng ấy.

f) Mặt phẳng đó đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng không chứa điểm ấy.

2. Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng :

Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

3. Ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là trọng tâm của tứ diện.

4. Đường thẳng và mặt phẳng song song (tức là chúng không có điểm chung) :

a) Đường thẳng a (không nằm trên mp(P)) song song với mp(P) khi và chỉ khi nó song song với một đường thẳng nằm trong (P).

b) Nếu mp(Q) đi qua đường thẳng a mà a song song với mp(P) thì giao tuyến của mp(P) và mp(Q) (nếu có) song song với a.

c) Hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.

5. Hai mặt phẳng song song (tức là chúng không có điểm chung) :

a) Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mp(Q) thì $(P) // (Q)$.

b) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mp(R) đã cắt (P) thì cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

c) Định lí Ta-lét : Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

d) Định lí Ta-lét đảo : Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và a' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$. Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

6. Hình chóp có đáy là một đa giác và các mặt bên đều là những tam giác có chung một đỉnh (đỉnh của hình chóp).

7. Hình lăng trụ có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là những hình bình hành ; các cạnh bên bằng nhau và đôi một song song.

8. Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành ; bốn đường chéo của hình hộp đồng quy tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.

9. Hình chóp cụt có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là hình thang ; các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

10. Phép chiếu song song theo phương l :

a) Không làm thay đổi sự thẳng hàng và thứ tự của các điểm thẳng hàng.

b) Biến hai đường thẳng song song (nhưng không song song với l) thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

c) Giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

11. Hình biểu diễn của một hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Hình biểu diễn của đường tròn thường là đường elip hoặc đường tròn.

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Hãy nêu sự khác biệt giữa hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song.

2. Nêu phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng.

3. Nêu phương pháp chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

4. Nêu phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.

5. Nêu phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song.

III - Bài tập

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

   a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung ;

   b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau ;

   c) Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng thuộc một mặt phẳng ;

   d) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

   a) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau ;

   b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau ;

   c) Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau ;

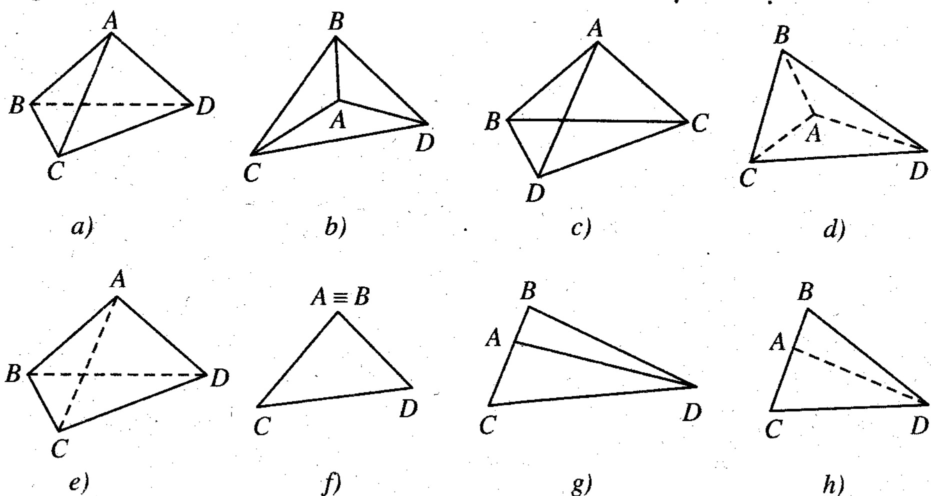
   d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau ;

   e) Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại ;

   f) Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại ;

   g) Một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

3. Trong các hình sau, hình nào là hình biểu diễn của một tứ diện ?



Hình 81

4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC, BF sao cho $MC = 2AM$; $NF = 2BN$. Qua M, N, kẻ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1. Chứng minh rằng :

a) $MN // DE$;

b) $M_1N_1 //$ mp(DEF) ;

c) mp$(MNN_1M_1) //$ mp(DEF).

5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', GG' lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và G_1. Chứng minh rằng :

a) GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ ;

b) G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$;

c) $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$; $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua hai trung điểm M, N của các cạnh AB, AD và tâm O của mặt $CDD'C'$.

7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên ba cạnh AB, DD', $C'B'$ lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$.

a) Chứng minh rằng mp(MNP) và mp$(AB'D')$ song song với nhau.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(MNP).

8. Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho $AM = kBN$ ($k > 0$ cho trước).

a) Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho $IM = kIN$.

IV - Các câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC ; G là trọng tâm tam giác BCD. Khi ấy, giao điểm của đường thẳng MG và mp(ABC) là :

(A) Điểm C ;

(B) Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng AN ;

(C) Điểm N ;

(D) Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng BC.

2. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm E, F, G lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, AD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mp(EFG) là :

(A) Một đoạn thẳng ; (B) Một tam giác ;

(C) Một tứ giác ; (D) Một ngũ giác.

3. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mp(IJK) là :

(A) Một tam giác ; (B) Một tứ giác ;

(C) Một hình thang ; (D) Một ngũ giác.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $AC \cap BD = I$, $AB \cap CD = J$, $AD \cap BC = K$. Đẳng thức nào **sai** trong các đẳng thức sau đây ?

(A) $(SAC) \cap (SBD) = SI$; (B) $(SAB) \cap (SCD) = SJ$;

(C) $(SAD) \cap (SBC) = SK$; (D) $(SAC) \cap (SAD) = AB$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng không đi qua đỉnh nào của hình chóp cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

(A) Các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$, SO đôi một chéo nhau ;

(B) Các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$, SO đồng phẳng ;

(C) Các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$, SO đồng quy ;

(D) Hai đường thẳng $A'C'$ và $B'D'$ cắt nhau còn hai đường thẳng $A'C'$ và SO chéo nhau.

6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) Đường thẳng GE song song với đường thẳng CD ;

(B) Đường thẳng GE cắt đường thẳng CD ;

(C) Hai đường thẳng GE và CD chéo nhau ;

(D) Đường thẳng GE cắt đường thẳng AD.

7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC và AC, N là điểm trên cạnh BD sao cho $BN = 2ND$. Gọi F là giao điểm của AD và mp(MNK). Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) $AF = FD$;

(B) $AF = 2FD$;

(C) $AF = 3FD$;

(D) $FD = 2AF$.

8. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mp(GCD) thì diện tích của thiết diện là :

(A) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$;

(B) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$;

(C) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$;

(D) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Khi ấy, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với :

(A) Đường thẳng AD ;

(B) Đường thẳng BJ ;

(C) Đường thẳng BI ;

(D) Đường thẳng IJ.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

(A) $A'B'$ // mp(SAD) ;

(B) $A'C'$ // mp(SBD) ;

(C) mp($A'C'D'$) // mp(ABC) ;

(D) $A'C'$ // BD.

11. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = m$ $(0 < m < a)$. Khi đó, diện tích thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với mp(ACD) là :

(A) $\dfrac{m^2\sqrt{3}}{4}$;

(B) $\dfrac{(a-m)^2\sqrt{2}}{2}$;

(C) $\dfrac{(a+m)^2\sqrt{3}}{4}$;

(D) $\dfrac{(a-m)^2\sqrt{3}}{4}$.

12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) song song với AC và SB lần lượt cắt các cạnh SA, AB, BC, SC, SD, BD tại M, N, E, F, I, J. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đôi một song song ;

(B) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng quy ;

(C) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng phẳng ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Bài đọc thêm



PHƯƠNG PHÁP TIÊN ĐỀ TRONG HÌNH HỌC

1. Khi mới ra đời, Hình học là môn khoa học thực nghiệm nảy sinh từ việc đo đạc, tính toán các đại lượng về khoảng cách giữa các địa điểm, diện tích các đám đất, thể tích các thùng chứa,... Thời cổ đại, người vùng Ba-bi-lon và Ai Cập đã tích luỹ được nhiều kiến thức hình học khá phong phú, chẳng hạn công thức Py-ta-go, định lí Ta-lét, công thức tính thể tích hình chóp cụt,... Dần dần Hình học trở thành một khoa học suy diễn, tức là thay vì dùng thực nghiệm để kiểm tra sự đúng đắn của các sự kiện hình học, người ta chứng minh bằng lập luận. Có nhiều tác phẩm hình học đã ra đời, nhưng nổi tiếng nhất và còn được giữ lại đến nay là tập "Cơ bản" của Ơ-clít (Euclid, nhà toán học Hy Lạp, sống vào khoảng thế kỉ thứ ba trước Công nguyên).

Tập "Cơ bản" của Ơ-clít gồm 13 cuốn, trong đó có 8 cuốn nói về Hình học. Toàn bộ nội dung môn Hình học sơ cấp của bậc Phổ thông ngày nay là một phần trong tác phẩm đó. Công lao to lớn của Ơ-clít là đã tập hợp lại những kết quả của nhiều tác giả trước, sắp xếp lại và chứng minh chặt chẽ. Để xây dựng môn Hình học, Ơ-clít đã xuất phát từ 10 tiên đề và định đề được thừa nhận là đúng mà không chứng minh. Từ đó, dựa vào các suy luận lôgic, ông đã chứng minh các định lí khác.

Như vậy, có thể nói Ơ-clít là người đặt nền móng cho phương pháp xây dựng Hình học mà ngày nay ta gọi là phương pháp tiên đề.

Để trình bày môn Hình học theo phương pháp tiên đề, người ta làm như sau :

1) Không định nghĩa một số khái niệm như : điểm, đường thẳng, mặt phẳng, điểm nằm giữa hai điểm, độ dài đoạn thẳng, độ lớn của góc,... Các khái niệm như vậy gọi là *các khái niệm cơ bản.* Các khái niệm khác sẽ được định nghĩa dựa vào những khái niệm cơ bản. Chẳng hạn, sự bằng nhau của các tam giác được định nghĩa dựa vào sự bằng nhau của các đoạn thẳng và sự bằng nhau của các góc.

2) Nêu ra một số mệnh đề được thừa nhận là đúng mà không chứng minh. Các mệnh đề như thế gọi là *tiên đề.* Chẳng hạn ta thừa nhận tiên đề : *"Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước"* hoặc tiên đề : *"Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước".*

Mọi mệnh đề khác đều phải được chứng minh dựa vào các tiên đề và các mệnh đề đã được chứng minh trước đó.

Chúng ta cần chú ý rằng tuy điểm, đường thẳng, mặt phẳng không được định nghĩa, nhưng chúng buộc phải thoả mãn các tiên đề. Cho nên có thể nói chúng được định nghĩa một cách gián tiếp qua các tiên đề.



Euclid (khoảng 330 - 275 TCN)



Lobachevsky (1792 - 1856)

2. Trong hệ thống các tiên đề hình học có một tiên đề gọi là tiên đề Ơ-clít (nó tương đương với định đề V trong tác phẩm Cơ bản của Ơ-clít). Tiên đề đó được phát biểu như sau : *"Cho điểm A không nằm trên đường thẳng b thì trong mặt phẳng (A,b) chỉ có một đường thẳng đi qua A và không cắt b".*

Trong lịch sử, khi nghiên cứu các tiên đề của Ơ-clít, nhất là định đề V nói trên, các nhà toán học đã nghi ngờ rằng có thể chứng minh được nó dựa vào các tiên đề khác và nếu quả thật như vậy thì cần phải loại nó ra khỏi danh sách các tiên đề. Nhiều nhà toán học nổi tiếng như : Xác-kê-ri (Saccheri, 1667 - 1733), Lăm-be (Lambert, 1728 - 1777), Lơ-giăng-đơ-rơ (Legendre,1752 - 1833),... đã tốn nhiều sức lực và trí tuệ để tìm cách chứng minh định đề V nhưng không thành công. Vào đầu thế kỉ XIX, các nhà toán học : Gau-xơ (Gauss, 1777 - 1855), Bô-li-ai (Bolyai, 1802 - 1860), đặc biệt là nhà toán học Nga Lô-ba-sép-xki (Lobachevsky), trong quá trình chứng minh định đề V của Ơ-clít, đã xây dựng một Hình học mới trong đó không thừa nhận định đề V mà thừa nhận tiên đề phủ định định đề V : *"Cho điểm A không nằm trên đường thẳng b thì trong mặt phẳng (A,b) có ít nhất hai đường thẳng đi qua A và không cắt b".*

Ngày nay, người ta thường gọi hình học đó là ***Hình học Lô-ba-sép-xki*** (một loại Hình học phi Ơ-clít).

Năm mươi năm sau khi Lô-ba-sép-xki công bố tác phẩm nói trên, người ta chứng minh được rằng Hình học Lô-ba-sép-xki không hề có mâu thuẫn và như vậy, tiên đề Ơ-clít đúng là một tiên đề.

Ngày nay, phương pháp tiên đề đã thâm nhập vào nhiều ngành toán học khác nhau và nó là một công cụ quan trọng trong việc xây dựng nên những bộ môn toán học hiện đại.

CHƯƠNG III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC



Ở chương II, chúng ta đã xét quan hệ song song trong không gian. Trong chương này ta nghiên cứu quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng. Kiến thức về vectơ là cơ sở để xây dựng quan hệ vuông góc trong không gian.

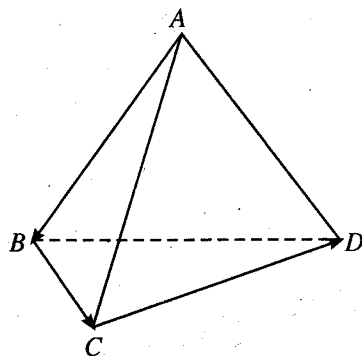
Khi học chương này, học sinh cần biết vận dụng các kiến thức đã có về vectơ trong mặt phẳng để áp dụng vào không gian, đồng thời bước đầu giải quyết được một số bài toán hình học không gian có liên quan đến các yếu tố vuông góc.

§1 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

1. Vectơ trong không gian

Khái niệm vectơ và các phép toán vectơ đã được đề cập trong chương trình hình học lớp 10. Tuy nhiên, khi đó tất cả các vectơ mà chúng ta xem xét đều nằm trên cùng một mặt phẳng.

Ở chương II, chúng ta đã làm quen với việc nghiên cứu hình học không gian mà đối tượng của nó là các hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chẳng hạn, tứ diện $ABCD$ là một hình có tính chất đó và như thế các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ không cùng nằm trong một mặt phẳng nào cả (h.82).



Hình 82

Trong chương này, chúng ta sẽ nói đến các vectơ trong không gian. Vectơ, các phép toán vectơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng, chúng cũng có các tính chất đã biết nên không nhắc lại. Sau đây, chúng ta nêu lên một số hoạt động và ví dụ nhằm mục đích ôn tập lại những kiến thức đã có về vectơ trong mặt phẳng để áp dụng vào không gian.



1

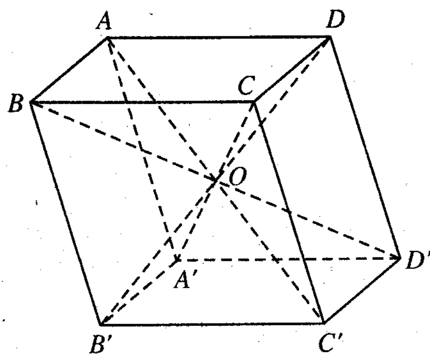
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O (h.83).

a) Hãy chỉ ra trên hình 83 những vectơ bằng nhau khác vectơ $\vec{0}$ và kiểm tra tính đúng đắn của đẳng thức

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}. \qquad (1)$$

b) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C}.$$



Hình 83



CHÚ Ý

Công thức (1) gọi là ***quy tắc hình hộp*** (để tìm tổng của ba vectơ).

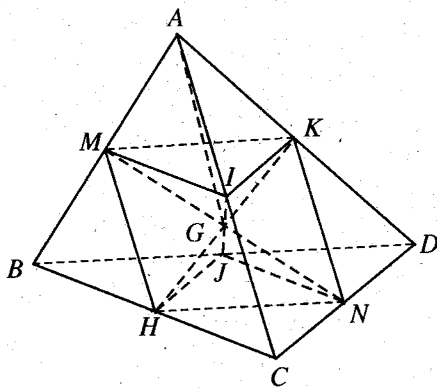
 2

Cho tứ diện $ABCD$ với trọng tâm G và các trung điểm các cạnh của nó (h.84).

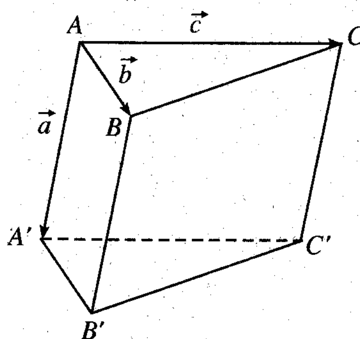
Hãy chỉ ra trên hình 84 những vectơ khác $\vec{0}$ bằng nhau và kiểm tra xem đẳng thức

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$$

có đúng không ?



Hình 84



Hình 85

 3

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ (h.85).

1) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2) Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG'}$ qua $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ví dụ 1

Cho tứ diện ABCD.

1. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng tỏ rằng

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

2. Chứng minh rằng điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau xảy ra :

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ *với mọi điểm P.*

Giải (h.86)

1. Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

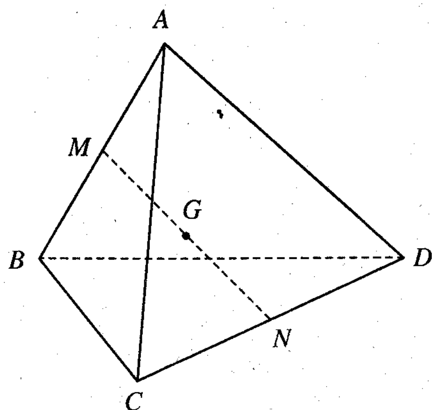
Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

và $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

nên $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$



Hình 86

2. a) Ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM},$$

$$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}.$$

Điểm G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \text{ hay } 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}.$$

Điều này tương đương với $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

b) G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Điều này có nghĩa là với điểm P bất kì, ta có

$$\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PG} = \vec{0},$$

hay $$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}).$$ □

Ví dụ 2

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = c$, $CD = c'$, $AC = b$, $BD = b'$, $BC = a$, $AD = a'$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$.

Giải. Ta có

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{2}(CB^2 + CD^2 - BD^2) - \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2)$$

$$= \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2 - BD^2 - CA^2).$$

Từ đó góc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$ xác định bởi

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}.$$ □

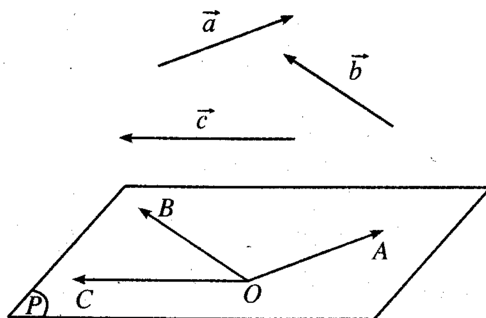
2. Sự đồng phẳng của các vectơ. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Ta biết rằng, với hai đường thẳng phân biệt cho trước trong không gian, luôn có mặt phẳng song song với hai đường thẳng đó. Nhưng nói chung, không có mặt phẳng song song với ba đường thẳng phân biệt cho trước. Nếu có mặt phẳng như vậy thì ta nói rằng ba vectơ nằm trên ba đường thẳng ấy là đồng phẳng.

ĐỊNH NGHĨA

*Ba vectơ gọi là **đồng phẳng** nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.*

Trên hình 87, giá của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều song song với mặt phẳng (P) nên ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.



Hình 87

Nhận xét

Từ định nghĩa trên, suy ra : Nếu ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi bốn điểm O, A, B, C cùng nằm trên một mặt phẳng hay ba đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng.

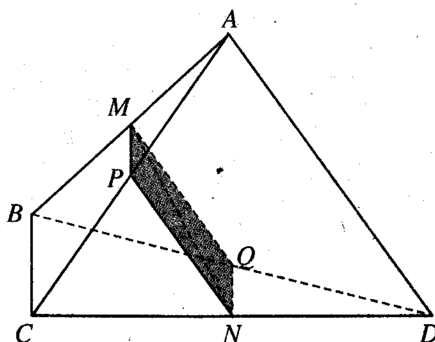
Bài toán 1

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.



4 (Để giải bài toán 1)

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC và BD. Khi đó $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó, hãy suy ra điều phải chứng minh (h.88).



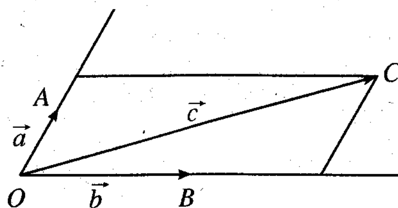
Hình 88

Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Từ định nghĩa ba vectơ đồng phẳng và sự khai triển một vectơ theo hai vectơ không cùng phương trong hình học phẳng, chúng ta có thể chứng minh được định lí sau (h.89).

ĐỊNH LÍ 1

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.



Hình 89



5

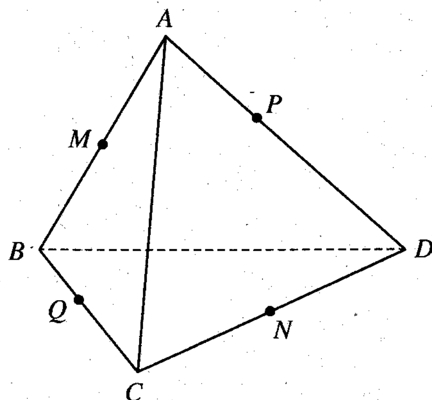
Chứng minh rằng

1) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác không thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng ;

2) Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $m = n = p = 0$.

Bài toán 2

Cho tứ diện ABCD. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng (h.90).



Hình 90



6 (Để giải bài toán 2)

1) Từ hệ thức $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, hãy chứng tỏ

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}.$$

2) Từ hai đẳng thức trên, chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}.$$

Vậy các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Định lí 1 nói đến điều kiện để có thể biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương. Định lí dưới đây sẽ nói về biểu thị một vectơ qua ba vectơ không đồng phẳng.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$, ta tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa, các số m, n, p là duy nhất.

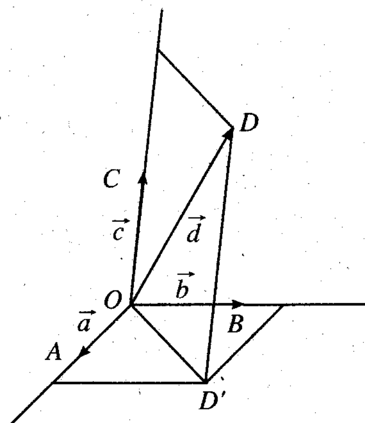
Chứng minh

Từ điểm O, ta đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ thì O, A, B, C không cùng thuộc một mặt phẳng.

Từ điểm D kẻ đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng OC, cắt mặt phẳng (OAB) tại điểm D' (h.91). Khi đó

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}.$$

Theo định lí 1, ta có các số m, n sao cho $\overrightarrow{OD'} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra do $\overrightarrow{D'D}$ và $\vec{c}$ cùng phương nên có số p để $\overrightarrow{D'D} = p\vec{c}$. Vậy $\overrightarrow{OD} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.



Hình 91

Giả sử còn có $\overrightarrow{OD} = m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c}$ thì

$$(m - m')\vec{a} + (n - n')\vec{b} + (p - p')\vec{c} = \vec{0}.$$

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên $m - m' = n - n' = p - p' = 0$ hay $m = m'$, $n = n'$, $p = p'$. Suy ra các số m, n, p là duy nhất. □

Bài toán 3

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Xét các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng A'C và C'D sao cho $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l\overrightarrow{ND}$ (k và l đều khác 1).

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BN}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) Xác định các số k, l để đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'.

Giải (h.92)

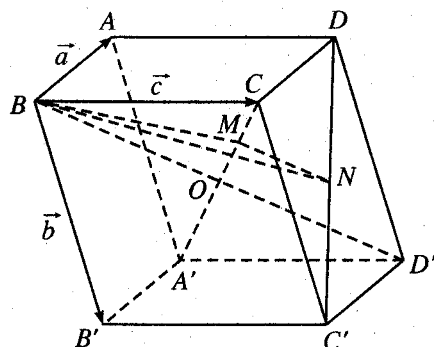
a) Từ giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA'} - k\overrightarrow{BC}}{1-k}, \text{ do đó}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC'} - l\overrightarrow{BD}}{1-l}, \text{ do đó}$$

$$\overrightarrow{BN} = -\frac{l}{1-l}\vec{a} + \frac{1}{1-l}\vec{b} + \vec{c}.$$



Hình 92

b) Vì BD' và $C'D$ là hai đường thẳng chéo nhau và N thuộc đường thẳng $C'D$ nên đường thẳng MN không thể trùng với đường thẳng BD'. Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng BD' khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'}$.

Do $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$ nên ta có

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{l}{1-l} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-l} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{k}{1-k}\right)\vec{c}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (quy tắc hình hộp) mà $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên

$$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{l}{1-l} - \dfrac{1}{1-k} = p \\ \dfrac{1}{1-l} - \dfrac{1}{1-k} = p \\ 1 + \dfrac{k}{1-k} = p \end{cases} \Leftrightarrow l = -1,\ k = -3, p = \frac{1}{4}.$$

Vậy khi $k = -3$, $l = -1$ thì đường thẳng MN và đường thẳng BD' song song với nhau. □

Câu hỏi và bài tập

1. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có đồng phẳng không nếu một trong hai điều sau đây xảy ra ?

a) Có một vectơ trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

b) Có hai vectơ trong ba vectơ đó cùng phương.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$.

a) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Điều ngược lại có đúng không ?

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$, I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD' ; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng $(ABB'A')$ song song với nhau.

5. Trong không gian cho tam giác ABC.

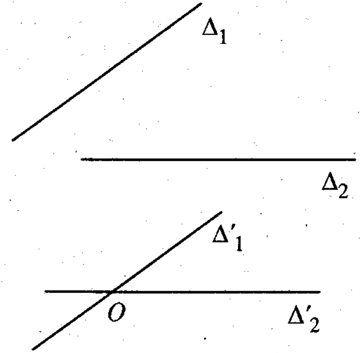
a) Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mp(ABC) thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O.

b) Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mp(ABC).

6. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA'$, $SB = bSB'$, $SC = cSC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng



Hình 93

Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bất kì trong không gian. Từ điểm O nào đó, ta vẽ hai đường thẳng Δ'_1, Δ'_2 lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1, Δ_2. Dễ thấy rằng khi điểm O thay đổi thì góc giữa Δ'_1 và Δ'_2 không thay đổi (h.93). Vì vậy ta có định nghĩa sau

ĐỊNH NGHĨA 1

Góc giữa hai đường thẳng *Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng Δ'_1 và Δ'_2 cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1 và Δ_2.*

Nhận xét

1) Để xác định góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2, ta có thể lấy điểm O nói trên thuộc một trong hai đường thẳng đó.

2) Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90°.

3) Nếu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng α nếu $\alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $\alpha > 90^\circ$.

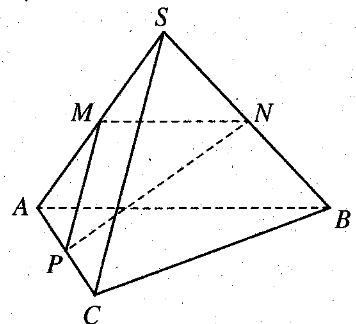
Ví dụ 1

Cho hình chóp S.ABC có

$SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB (h.94).

? *Các mặt của hình chóp S.ABC là những tam giác có gì đặc biệt ?*



Hình 94

Giải

Cách 1. Ta tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Ta có

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}}{a^2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{-\frac{a^2}{2} + 0}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^{\circ}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60°.

Cách 2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC. Khi đó $MN \,//\, AB$, $MP \,//\, SC$. Để tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB, ta cần tính $\widehat{NMP}$.

Ta có $\quad MN = MP = \frac{a}{2}, \quad SP^2 = \frac{3a^2}{4}, \quad BP^2 = \frac{5a^2}{4},$

$$BP^2 + SP^2 = 2NP^2 + \frac{SB^2}{2}.$$

Vậy $NP^2 = \frac{3a^2}{4}$.

Mặt khác

$$NP^2 = NM^2 + MP^2 - 2MN.MP\cos\widehat{NMP},$$

do đó $\quad \cos\widehat{NMP} = -\frac{\frac{a^2}{4}}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$, suy ra $\widehat{NMP} = 120^{\circ}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60°. □

2. Hai đường thẳng vuông góc

ĐỊNH NGHĨA 2

> *Hai đường thẳng được gọi là* ***vuông góc với nhau*** *nếu góc giữa chúng bằng* 90°.

Khi hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta còn nói gọn là hai đường thẳng a và b vuông góc, và kí hiệu $a \perp b$ hay $b \perp a$. Như vậy $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$, ở đó $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a và b.

Từ định nghĩa trên, ta có nhận xét sau

Nhận xét

Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.



1

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (hình hộp như thế gọi là ***hình hộp thoi***). Hãy giải thích tại sao $AC \perp B'D'$.

Ví dụ 2

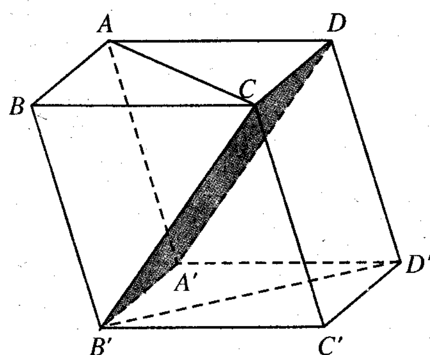
Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và

$$\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^{\circ}.$$

Tính diện tích tứ giác $A'B'CD$.

Giải (h.95)

Trước hết ta dễ thấy $A'B'CD$ là hình bình hành, ngoài ra $B'C = a = CD$ nên $A'B'CD$ là hình thoi. Ta sẽ chứng minh $A'B'CD$ là hình vuông.



Hình 95

Thật vậy, ta có

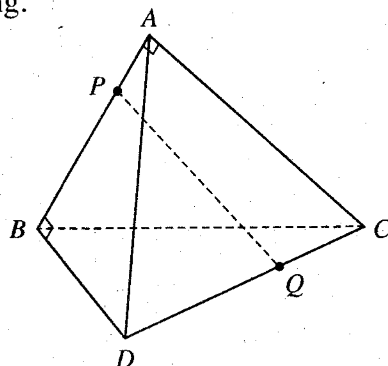
$$\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Vậy có $CB' \perp CD$, do đó $A'B'CD$ là hình vuông.

Từ đó diện tích hình vuông $A'B'CD$ bằng a^2. □

Ví dụ 3

Cho hình tứ diện $ABCD$, trong đó $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P và Q là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và CD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau (h.96).



Hình 96


2 (Để giải ví dụ 3)

Biểu thị $\overrightarrow{PQ}$ theo $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ}$ theo $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DQ}$ để có

$$(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD}.$$

Tính tích vô hướng của $(1-k)\overrightarrow{PQ}$ với $\overrightarrow{AB}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4

Tính các góc giữa các cặp đường thẳng DA và BC, DB và AC, DC và AB của tứ diện ABCD, biết rằng DA = BC = a, DB = AC = b, DC = AB = c.

Giải

Theo kết quả ở ví dụ 2 §1, ta có

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{c^2 - b^2}{a^2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng BC và AD là α mà $\cos\alpha = \dfrac{|c^2 - b^2|}{a^2}$.

Tương tự như trên, nếu gọi β và γ lần lượt là góc giữa các cặp đường thẳng AC và BD, AB và DC thì

$$\cos\beta = \frac{|a^2 - c^2|}{b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{|a^2 - b^2|}{c^2}.$$ □

Câu hỏi và bài tập

7. Mỗi khẳng định sau có đúng không ?

a) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

b) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

8. a) Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba vectơ $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng.

b) Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì đồng phẳng. Từ đó suy ra các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

10. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại có đúng không ?

11. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = 60^o$, $\widehat{BAD} = 60^o$, $\widehat{CAD} = 90^o$. Chứng minh rằng :

a) $AB \perp CD$;

b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

§3 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Bài toán 1

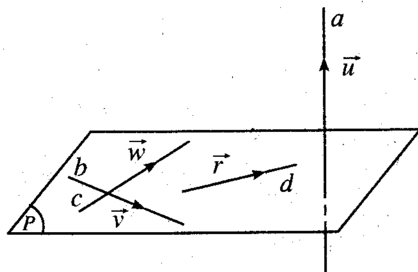
Cho hai đường thẳng cắt nhau b và c cùng nằm trong mặt phẳng (P). Chứng minh rằng nếu đường thẳng a vuông góc với cả b và c thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).



1 (Để giải bài toán 1)

• Kí hiệu $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng a, b, c, d, trong đó d là đường thẳng bất kì nằm trong (P) (h.97). Giả thiết của bài toán có nghĩa là $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = 0$.

Hãy chứng tỏ $\vec{u}.\vec{r} = 0$.



Hình 97

Khi a vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) thì ta nói rằng đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Vậy ta có định nghĩa

ĐỊNH NGHĨA 1

Một đường thẳng gọi là ***vuông góc*** *với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.*

Khi đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), ta còn nói mặt phẳng (P) vuông góc với a hoặc a và (P) vuông góc với nhau, và kí hiệu $a \perp (P)$ hoặc $(P) \perp a$.

Từ bài toán 1 và định nghĩa trên, ta có định lí sau nói về điều kiện để đường thẳng và mặt phẳng vuông góc với nhau.

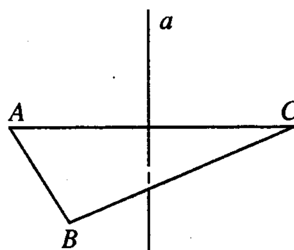
ĐỊNH LÍ 1

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).


2

Chứng tỏ rằng nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba, tức là phải chứng minh (h.98) :

$$\left.\begin{matrix} a \perp AB \\ a \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp BC.$$



Hình 98

2. Các tính chất

Từ định nghĩa nêu trên, ta có các tính chất sau :

Tính chất 1

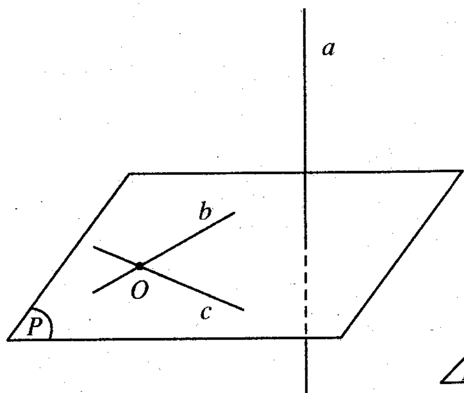
Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

Tính chất 2

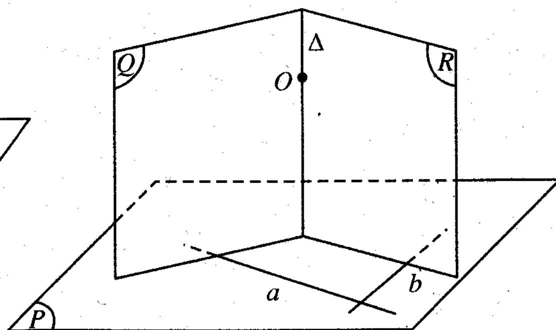
Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

Nhận xét

• Mặt phẳng (P) nói trong tính chất 1 được xác định bởi hai đường thẳng phân biệt b và c cùng đi qua điểm O và cùng vuông góc với đường thẳng a (h.99).



Hình 99

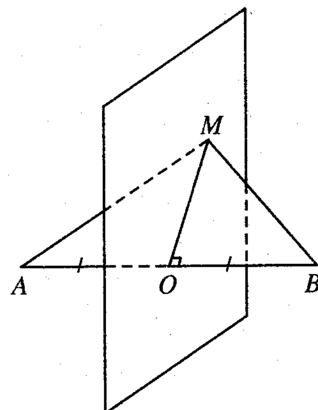


Hình 100

• Đường thẳng Δ trong tính chất 2 là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R) cùng đi qua O và lần lượt vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trong mặt phẳng (P) (h.100).

• Từ tính chất 1, ta thấy có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với AB tại trung điểm O của đoạn thẳng AB. Mặt phẳng đó gọi là ***mặt phẳng trung trực*** của đoạn thẳng AB (h.101).

Dễ thấy rằng *mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.*



Hình 101



3

Tìm tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

Trong chương II, ta đã đề cập đến quan hệ song song giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng. Kết hợp với các tính chất nêu trên, ta có thể chứng minh được một số tính chất nói về mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

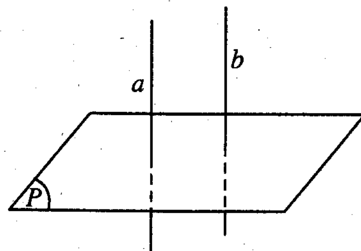
3. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Tính chất 3 (h.102)

a) Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 3 được viết gọn là :



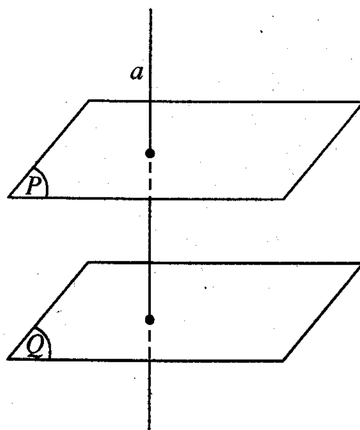
Hình 102

- $\left.\begin{array}{l} a /\!/ b \\ (P) \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \perp b$;
- $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \not\equiv b \end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ b.$

Tính chất 4 (h.103)

> *a) Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.*
>
> *b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*

Tính chất 4 được viết gọn là :



Hình 103

- $\left.\begin{array}{l} (P) /\!/ (Q) \\ a \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q)$;
- $\left.\begin{array}{l} (P) \perp a \\ (Q) \perp a \\ (P) \not\equiv (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) /\!/ (Q).$

Nhận xét

Trong tính chất 3, nếu ta thay các cụm từ "mặt phẳng" thành "đường thẳng", "đường thẳng" thành "mặt phẳng", còn các từ khác giữ nguyên thì ta có tính chất 4.

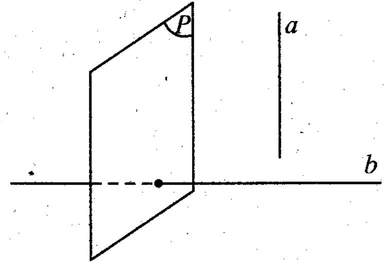
Tính chất 5 (h.104)

> *a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a.*
>
> *b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.*

Tính chất 5 được viết gọn là :

- $\left.\begin{array}{l} a // (P) \\ b \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a$;

- $\left.\begin{array}{l} a \not\subset (P) \\ a \perp b \\ (P) \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow a // (P)$.



Hình 104

4. Định lí ba đường vuông góc

Phép chiếu vuông góc

Một trường hợp thường gặp của phép chiếu song song là phép chiếu vuông góc.

ĐỊNH NGHĨA 2

> *Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là **phép chiếu vuông góc** lên mặt phẳng (P).*

Vì phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (*P*) là trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song. *Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (*P*) còn được gọi đơn giản là ***phép chiếu lên mặt phẳng* (*P*)**. Nếu $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của hình $\mathscr{H}$ trên mp(*P*) thì ta cũng nói $\mathscr{H}'$ là ***hình chiếu*** của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (*P*).

Định lí ba đường vuông góc

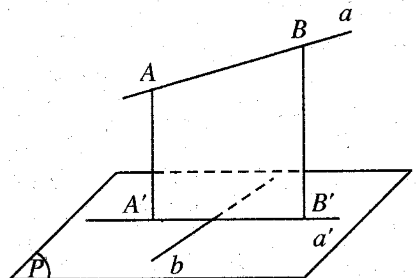
ĐỊNH LÍ 2

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

Chứng minh

Nếu *a* nằm trong (*P*) thì kết quả là hiển nhiên.

Nếu *a* không nằm trong (*P*) thì ta lấy hai điểm phân biệt *A* và *B* thuộc *a*. Gọi *A'* và *B'* lần lượt là hình chiếu của *A* và *B* trên (*P*), khi đó hình chiếu *a'* của đường thẳng *a* trên (*P*) chính là đường thẳng đi qua hai điểm *A'* và *B'* (h.105).



Hình 105

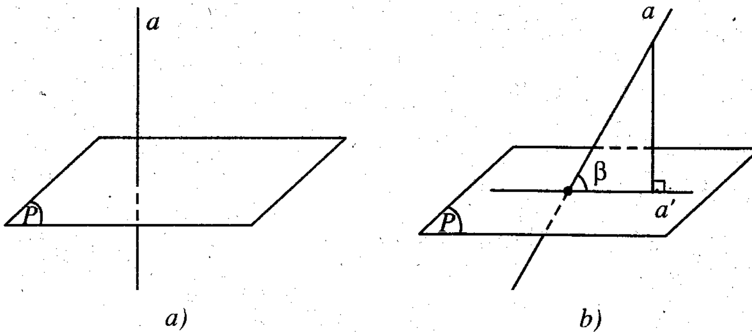
Vì $b \subset (P)$ nên $b \perp AA'$.

Vậy nếu $b \perp a$ thì $b \perp$ mp(a', a), do đó $b \perp a'$.

Ngược lại, nếu $b \perp a'$ thì $b \perp$ mp(a', a), do đó $b \perp a$. □

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Ta có định nghĩa sau (h.106)



Hình 106

ĐỊNH NGHĨA 3

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^o.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

Lưu ý rằng *góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá* 90^o.

Ví dụ

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a ; SA $\perp$ mp*(ABCD).*

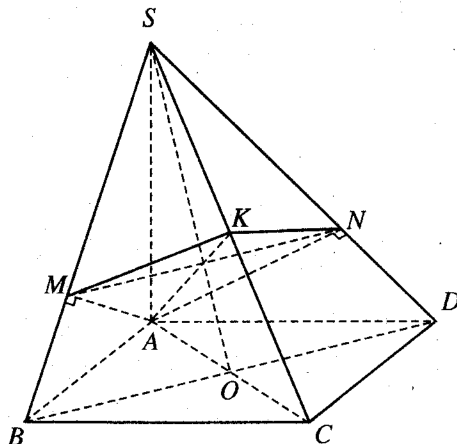
1. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD.

a) Chứng minh rằng MN // BD và SC $\perp$ *(AMN).*

b) Gọi K là giao điểm của SC với mp*(AMN). Chứng minh tứ giác AMKN có hai đường chéo vuông góc.*

2. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) khi $SA = a\sqrt{2}$, $AB = a$.

Giải (h.107)



Hình 107

1. a) Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $BM = DN$. Mặt khác, tam giác SBD cân tại đỉnh S nên MN song song với BD.

Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AM$; mặt khác $SB \perp AM$, do đó $AM \perp SC$.

Tương tự, $AN \perp SC$. Vậy $SC \perp (AMN)$.

b) Do $MN \mathbin{//} BD$ mà $BD \perp (SAC)$ nên $MN \perp (SAC)$, từ đó $MN \perp AK$.

2. Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt khác $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{2}$ nên $\widehat{SCA} = 45^o$. Vậy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^o. □

Câu hỏi và bài tập

12. Khẳng định "Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với (P)" có đúng không ? Vì sao ?

13. Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Nếu $a \mathbin{//} (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

b) Nếu $a \mathbin{//} (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

c) Nếu $a \mathbin{//} (P)$, $b \mathbin{//} a$ thì $b \mathbin{//} (P)$.

14. Cho điểm S có hình chiếu trên mp(P) là H. Với điểm M bất kì trên (P) (M không trùng H), ta gọi đoạn thẳng SM là ***đường xiên***, đoạn thẳng HM là ***hình chiếu của đường xiên*** đó. Chứng minh rằng :

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau.

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào dài hơn thì có hình chiếu dài hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.

15. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

16. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

a) Tính độ dài AD.

b) Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D.

17. Cho hình tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc.

a) Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn.

b) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mp(ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ mp(ABC) và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :

a) AH, SK, BC đồng quy ;

b) $SC \perp$ mp(BHK) ;

c) $HK \perp$ mp(SBC).

19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG.

b) Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C. Khi đó hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mp(P).

20. a) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Vậy, các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ diện như thế gọi là ***tứ diện trực tâm***.

b) Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương :

i) $ABCD$ là tứ diện trực tâm.

ii) Chân đường cao của tứ diện hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện.

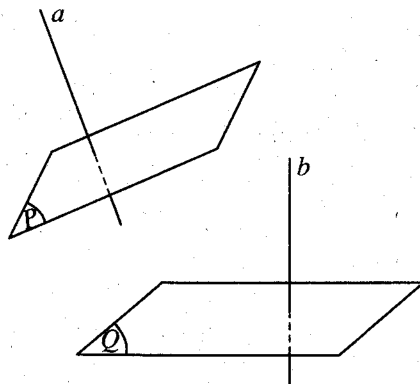
iii) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

c) Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là ***trực tâm của tứ diện*** nói trên.

§4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với (P) và (Q) (h.108). Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a và b không phụ thuộc vào cách lựa chọn chúng và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).



Hình 108

ĐỊNH NGHĨA 1

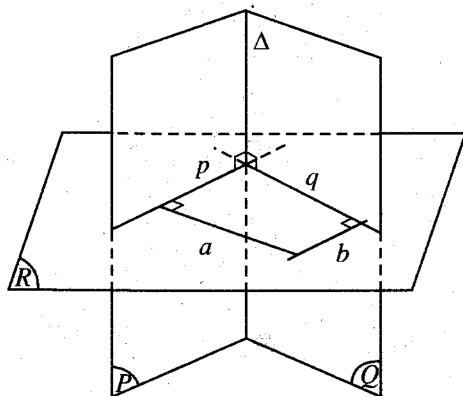
> ***Góc giữa hai mặt phẳng** là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.*

Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng

?1 *Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng bao nhiêu ?*

Bây giờ, giả sử (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Ta vẽ một mặt phẳng (R) vuông góc với Δ và gọi p, q lần lượt là giao tuyến của (R) với (P) và (R) với (Q). Khi đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa p và q.

Thật vậy, trong mp(R), xét các đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với p và q thì $a \perp (P)$, $b \perp (Q)$ và dễ thấy góc giữa hai đường thẳng a, b bằng góc giữa hai đường thẳng p, q (h.109). Như vậy ta có :



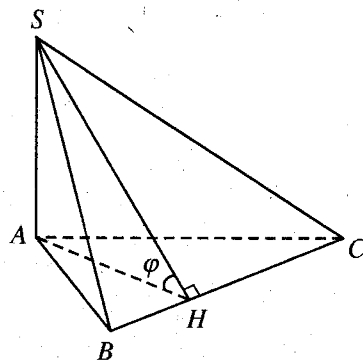
Hình 109

CHÚ Ý

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ, để tính góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (R) vuông góc với Δ, lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến p và q. Lúc đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng p, q.

Ví dụ

Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC). Chứng minh rằng $S_{ABC} = S_{SBC}.\cos\varphi$, ở đây kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.



Hình 110

Giải (h.110)

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Do $SA \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp BC$. Suy ra $\widehat{SHA} = \varphi$ và $AH = SH.\cos\varphi$. Từ đó ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}BC.SH.\cos\varphi = S_{SBC}.\cos\varphi. \quad \square$$

Mở rộng kết quả của ví dụ trên, ta có định lí tổng quát sau đây :

ĐỊNH LÍ 1

Gọi S là diện tích của đa giác $\mathscr{H}$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P') thì $S' = S.\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

2. Hai mặt phẳng vuông góc

ĐỊNH NGHĨA 2

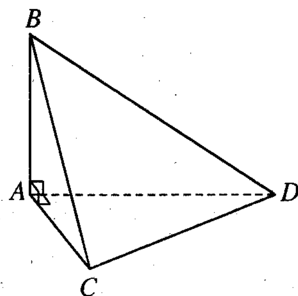
*Hai mặt phẳng gọi là **vuông góc với nhau** nếu góc giữa chúng bằng 90°.*

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì ta còn nói gọn là *hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc*, kí hiệu $(P) \perp (Q)$ hay $(Q) \perp (P)$.



1

Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc (h.111). Hãy chỉ ra các đường thẳng lần lượt vuông góc với các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) và từ đó suy ra các mặt phẳng ấy đôi một vuông góc.



Hình 111

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

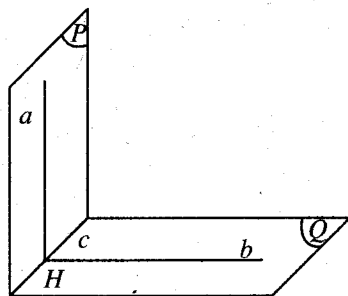
Định lí dưới đây nói về một điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Chứng minh (h.112)

Giả sử (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng a mà a vuông góc với mp(Q). Gọi H là giao điểm của a và (Q) thì H thuộc giao tuyến c của (P) và (Q). Trong (Q), kẻ đường thẳng b đi qua H và vuông góc với c. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) chính là góc giữa a và b. Vì $a \perp (Q)$ nên $a \perp b$, từ đó suy ra hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. □



Hình 112

Ngược lại, nếu cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mặt phẳng này có chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia hay không ? Định lí 3 sau đây trả lời câu hỏi đó.

Tính chất của hai mặt phẳng vuông góc

ĐỊNH LÍ 3

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).

Chứng minh (h.112)

Gọi c là giao tuyến của (P) và (Q), H là giao điểm của a và c. Trong mp(Q), kẻ đường thẳng b đi qua điểm H và vuông góc với c. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) chính là góc giữa a và b. Vì $(P) \perp (Q)$ nên $a \perp b$. Như vậy, ta có đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b, c cắt nhau cùng thuộc (Q), suy ra $a \perp (Q)$. □

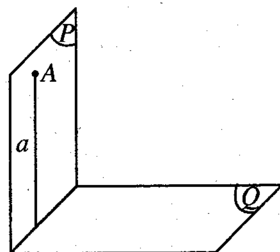
Từ định lí 2 và định lí 3, ta dễ dàng suy ra các hệ quả sau :

HỆ QUẢ 1 (h.113)

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

Hệ quả 1 được viết gọn là :

$$\left.\begin{array}{l}(P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a\end{array}\right\} \Rightarrow a \subset (P).$$



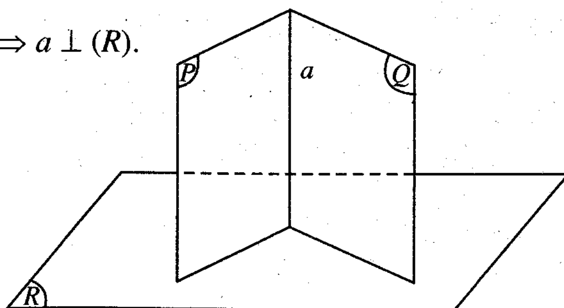
Hình 113

HỆ QUẢ 2 (h.114)

> *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.*

Hệ quả 2 được viết gọn là :

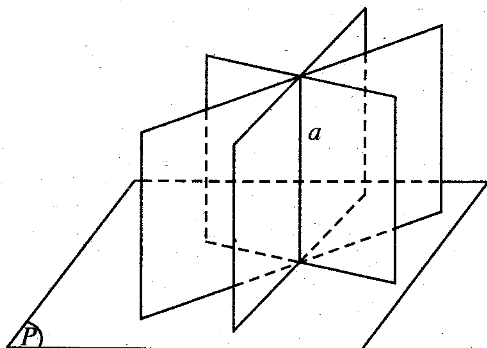
$$\left.\begin{array}{l}(P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R)\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (R).$$



Hình 114

Từ định lí 2, ta nhận thấy nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì qua a có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) (h.115). Vậy khi a không vuông góc với (P) thì có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (P) ?

Hệ quả sau sẽ trả lời câu hỏi đó.



Hình 115

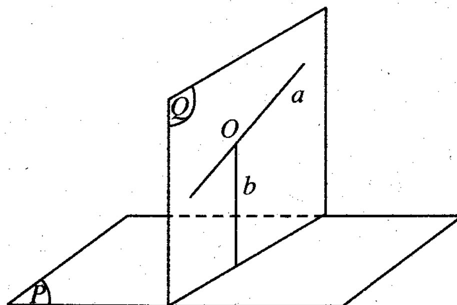
HỆ QUẢ 3

> *Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).*



2 (Để chứng minh hệ quả 3)

- Lấy điểm O thuộc a, dựng đường thẳng b đi qua điểm O và vuông góc với (P). Hãy chứng tỏ mp(a, b) chính là mp(Q) phải tìm (h.116).
- Sử dụng hệ quả 2 để chứng minh tính duy nhất của mặt phẳng (Q).



Hình 116

3. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương

Trong chương II, ta đã nêu định nghĩa hình lăng trụ. Ở phần này, ta sẽ xét một số hình lăng trụ đặc biệt.

ĐỊNH NGHĨA 3	HÌNH VẼ	?2
Hình lăng trụ đứng *Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy (h.117).*	B, A, C, E, D, B', A', C', E', D' Hình 117	• *Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình gì ?* • *Các mặt bên của hình lăng trụ đứng có vuông góc với mặt đáy không ?*
Hình lăng trụ đều *Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều (h.118).*	A_2, A_3, O, A_1, A_4, A_6, A_5, A'_2, A'_3, A'_1, A'_4, O', A'_6, A'_5 Hình 118	*Các mặt bên của hình lăng trụ đều có bằng nhau không ?*
Hình hộp đứng *Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành (h.119).*	Hình 119	*Hình hộp đứng có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật ?*
Hình hộp chữ nhật *Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật (h.120)*	Hình 120	*Sáu mặt của hình hộp chữ nhật có phải là những hình chữ nhật không ? Ngược lại, một hình hộp mà sáu mặt của nó là hình chữ nhật có phải là hình hộp chữ nhật không ?*

ĐỊNH NGHĨA 3	HÌNH VẼ	?2
Hình lập phương *Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau (h.121).*	*Hình 121*	*Hình hộp chữ nhật mà diện tích các mặt đều bằng nhau có phải là hình lập phương hay không ?*

Bài toán

Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật khi biết độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh là a, b, c (a, b, c gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật).

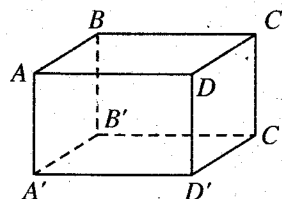
Giải (h.122)

Từ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA'} = 0$

ta có $\overrightarrow{AC'}^2 = a^2 + b^2 + c^2$

hay $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Hình 122

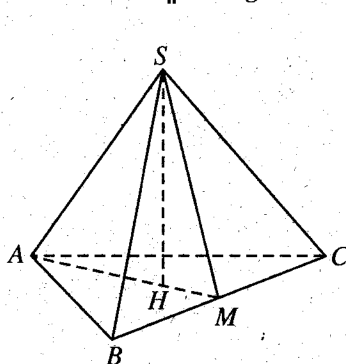
Tương tự các đường chéo còn lại cũng bằng $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. □

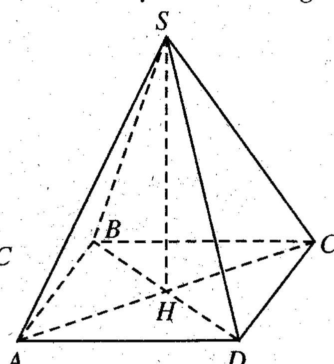
?3 *Độ dài đường chéo của hình lập phương cạnh a bằng bao nhiêu ?*

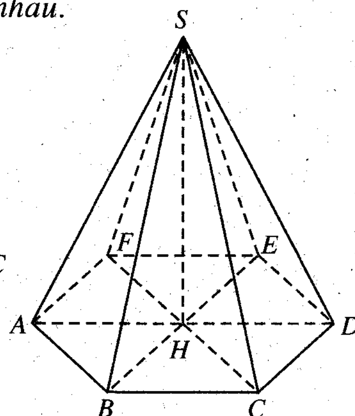
4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

ĐỊNH NGHĨA 4

Một hình chóp được gọi là ***hình chóp đều*** *nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.*







Hình 123

Ta biết rằng đối với một hình chóp bất kì, đường thẳng vuông góc với mặt đáy kẻ từ đỉnh gọi là ***đường cao*** của hình chóp.

?4 *Các kết quả sau đây về hình chóp đều có đúng không ? Vì sao ?*

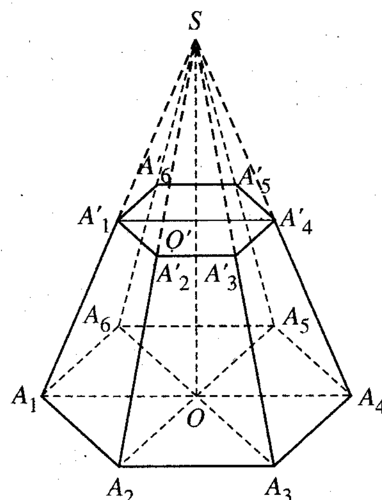
- *Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và đường cao của hình chóp đi qua tâm của đáy (tâm của đa giác đều chính là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp đa giác đó).*
- *Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.*

ĐỊNH NGHĨA 5

> *Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là* ***hình chóp cụt đều****.*

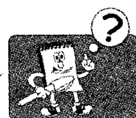
Đoạn nối tâm của hai đáy được gọi là ***đường cao*** của hình chóp cụt đều.

?5 *Tại sao trong hình chóp cụt đều, các mặt bên là những hình thang cân bằng nhau ?*



Hình 124

Em có biết



KIM TỰ THÁP AI CẬP

Nhiều Kim tự tháp (từ Hán - Việt nghĩa là cái tháp hình chữ kim 金, tức là hình chóp) đã được xây dựng ở Ai Cập bắt đầu khoảng 2500 năm trước công nguyên. Các tháp đó là những ngôi mộ của vua, hoàng hậu, ...



Kim tự tháp Kê-ốp (Chéops) (ở hình trên) là tháp lớn nhất. Nó được coi là một trong bảy kì quan của thế giới. Đó là một hình chóp tứ giác đều, đáy là một hình vuông có cạnh dài khoảng 230m, ngày xưa có chiều cao khoảng 147m, ngày nay chỉ còn cao 138m do bị xói mòn ở đỉnh. Trong hơn 4000 năm, đó là kiến trúc cao nhất thế giới. Mãi đến thời Trung cổ mới có một số nhà thờ cao hơn. Tháp nặng khoảng 6 triệu tấn và được tạo thành bởi hơn 2 300 000 tảng đá.

Ở bên trong kim tự tháp Kê-ốp có "buồng của vua" dạng hình hộp chữ nhật, dài 20 "cánh tay", rộng 10 "cánh tay", cao 11,18 "cánh tay" ("cánh tay" là đơn vị độ dài thời cổ, xấp xỉ 52,5cm). Số đo khá lẻ 11,18 này đã hấp dẫn các nhà khảo cứu : phải chăng có thể giải thích điều này khi tính độ dài đường chéo hình hộp và độ dài đường chéo mặt bên của hình hộp đó ?

Câu hỏi và bài tập

21. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau ;

b) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau ;

c) Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước ;

d) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước ;

e) Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định ;

f) Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng ;

g) Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Nếu

$$AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không ? Vì sao ?

23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Chứng minh rằng AC' vuông góc với hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(B'CD')$.

b) Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích thiết diện đó.

24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60^o.

25. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy $C \in (P)$, $D \in (Q)$ sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD$. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD. Tính diện tích thiết diện khi $AC = AB = BD = a$.

26. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau ?

a) Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối bằng nhau ;

b) Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối vuông góc ;

c) Tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện đều.

27. Cho hai tam giác ACD, BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính AB, IJ theo a và x.

b) Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc ?

28. Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mp(P) và mp(ABC) là φ ($\varphi \neq 90^{\circ}$) ; hình chiếu của tam giác ABC trên mp(P) là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi.$$

Hướng dẫn. Xét hai trường hợp :

a) Tam giác ABC có một cạnh song song hoặc nằm trong mp(P) ;

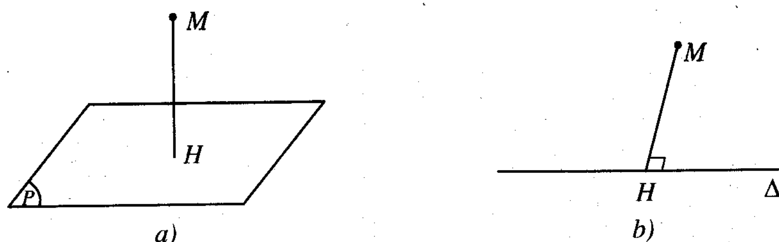
b) Tam giác ABC không có cạnh nào song song hay nằm trong mp(P).

§5 KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, đến một đường thẳng

Để đi đến khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng hoặc một đường thẳng, ta xét hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng

hoặc đường thẳng. Trên hình 125a), ta có H là hình chiếu của M trên mp(P) và trên hình 125b), ta có H là hình chiếu của M trên đường thẳng Δ.



Hình 125

Ta có định nghĩa sau :

ĐỊNH NGHĨA 1

> ***Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng*** *(P) (hoặc* ***đến đường thẳng*** *Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (P) (hoặc trên đường thẳng Δ).*

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được kí hiệu là $d(M\ ;\ (P))$.

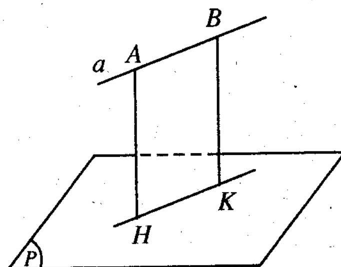
Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được kí hiệu là $d(M\ ;\ \Delta)$.

?1 *Trong các khoảng cách từ M đến một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (P), khoảng cách nào là nhỏ nhất ?*

?2 *Cũng câu hỏi như trên nếu thay mặt phẳng (P) bởi đường thẳng Δ.*

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Với hai điểm A, B bất kì trên a, hiển nhiên ta có $d(A\ ;\ (P)) = d(B\ ;\ (P))$ (h.126). Như vậy, $d(A\ ;\ (P))$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A khi A thay đổi trên a. Từ đó ta có định nghĩa



Hình 126

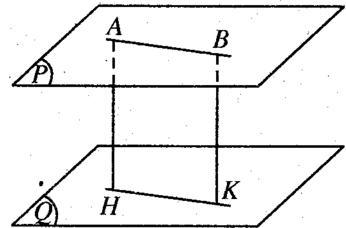
ĐỊNH NGHĨA 2

> ***Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng*** *(P)* ***song song*** *với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).*

Kí hiệu khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nó là $d(a\ ;(P))$.

?3 *Khi đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), trong các khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến một điểm bất kì của (P), khoảng cách nào là nhỏ nhất ?*

Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Khi ấy, dễ thấy $d(A\ ;(Q)) = d(B\ ;(Q))$ với A, B là hai điểm bất kì thuộc (P), tức là $d(A\ ;(Q))$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A khi A thay đổi trên (P) (h.127).



Hình 127

Từ đó ta có định nghĩa

ĐỊNH NGHĨA 3

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song *là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

Kí hiệu khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là $d((P)\ ;(Q))$ thì $d((P)\ ;(Q)) = d(A\ ;(Q)) = d(C\ ;(P))$, trong đó A là một điểm nào đó thuộc (P) và C là một điểm nào đó thuộc (Q).

?4 *Trong các khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song, khoảng cách nào là nhỏ nhất ?*

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

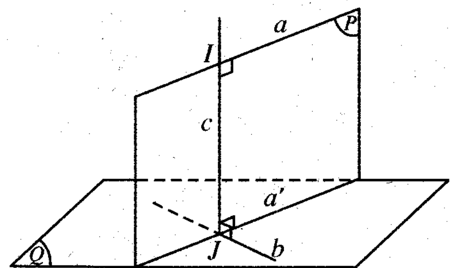
Bài toán

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Tìm đường thẳng c cắt cả a và b đồng thời vuông góc với cả a và b.

Giải

Do a và b chéo nhau nên có duy nhất mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng b và song song với đường thẳng a.

Mặt phẳng (P) đi qua a và vuông góc với (Q) cắt đường thẳng b tại điểm J. Gọi c là đường thẳng đi qua J và vuông góc với (Q) thì c nằm trong mp(P), do đó c cắt a tại điểm I. Khi ấy c là đường thẳng phải tìm (h.128). □

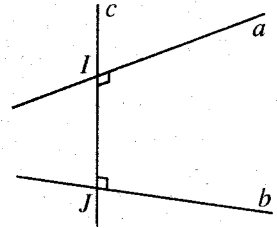


Hình 128


Chứng minh tính duy nhất của đường thẳng c trong bài toán trên.

Thuật ngữ

Đường thẳng c nói trên gọi là ***đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau*** a và b.
Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là ***đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng*** đó (h.129).



Hình 129

ĐỊNH NGHĨA 4

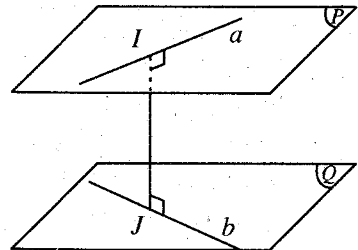
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.*

?5 *Trong các khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng chéo nhau, khoảng cách nào là nhỏ nhất ?*

Nếu gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng a và b thì rõ ràng :

$$IJ = d(a\ ;(Q)) = d(b\ ;(P))$$
$$= d((P)\ ;(Q)) \quad \text{(h.130)}.$$

Vậy ta có :



Hình 130

Nhận xét

1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

4. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

c) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(A'C'D)$ trong trường hợp $a = b = c$.

Giải (h.131)

a) Kẻ BH vuông góc với AC, do

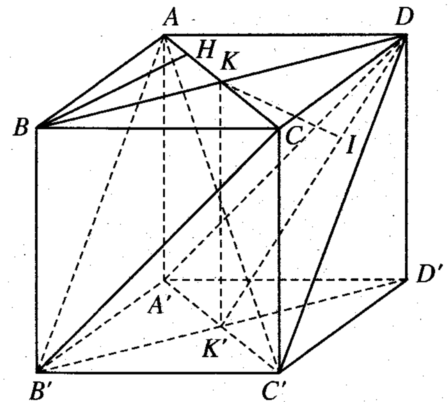
$$BH \perp AA'$$

nên $$BH \perp (ACC'A').$$

Vậy $d(B\,;(ACC'A')) = BH$. Ta có

$$BH\,.\,AC = BA\,.\,BC.$$

hay $$BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Hình 131

b) BB' và AC' chéo nhau mà $BB' \,//\, (ACC'A')$ nên

$$d(BB'\,;AC') = d(BB'\,;(ACC'A')) = d(B\,;(ACC'A')) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

c) Dễ thấy mp($AB'C$) và mp($A'C'D$) song song với nhau. Do $a = b = c$ nên $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương. Khi đó, gọi K và K' lần lượt là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$ thì mp($KK'D'D$) là mặt phẳng trung trực của $A'C'$. Từ đó suy ra mp($KK'D'D$) vuông góc với mp($DA'C'$). Kẻ KI vuông góc với giao tuyến DK' của hai mặt phẳng đó thì $KI \perp$ mp($A'C'D$). Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng ($AB'C$) và ($A'C'D$) bằng KI.

Ta có tam giác $KK'D$ vuông tại K nên

$$\frac{1}{KI^2} = \frac{1}{DK^2} + \frac{1}{KK'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2},$$

tức là $$KI = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chú ý rằng BD' vuông góc với hai mặt phẳng (ACB'), ($DA'C'$) và đi qua tâm G, G' của hai tam giác đều $AB'C$, $DA'C'$. Từ đó suy ra khoảng cách cần tìm cũng bằng GG' và bằng $\frac{1}{3}BD'$. □

Ví dụ 2

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

a) SB và AD ; *b) BD và SC.*

Giải (h.132)

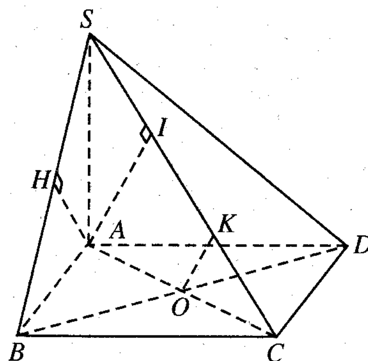
a) Ta có $AD \perp (SBA)$, kẻ AH vuông góc với SB thì AH là đường vuông góc chung của SB và AD. Vậy

$$d(AD\ ;SB) = AH.$$

Vì AH là đường cao của tam giác vuông cân SAB nên

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Từ đó $\quad d(AD\ ;SB) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$



Hình 132

b) Ta có BD vuông góc với mp(SAC) tại tâm O của hình vuông $ABCD$. Trong mp(SAC), kẻ OK vuông góc với SC thì OK là đường vuông góc chung của BD và SC. Dễ thấy $d(BD\ ;SC) = OK = \dfrac{1}{2}AI$ (AI là đường cao của tam giác vuông SAC). Ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}$$

nên $AI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, từ đó $d(BD\ ;SC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. □

Câu hỏi và bài tập

29. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC = AD = BD = a$, $AB = c$, $CD = c'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

30. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^o. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và $B'C'$ vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

32. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC' = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').

b) Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng AC' và CD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

33. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^{\circ}$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD ; K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K, hãy tính khoảng cách đó theo a.

35. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $AC = BD$, $AD = BC$ thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường thẳng nối trung điểm của AB và CD. Điều ngược lại có đúng không ?

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa vectơ và các phép toán vectơ trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng. Ngoài ra :

a) Ba vectơ gọi là đồng phẳng khi các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

b) Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là có ba số m, n, p không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

c) Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi vectơ $\vec{d}$ đều có thể viết dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, với các số m, n, p duy nhất.

2. Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

3. – Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng đó.

– Đường thẳng a vuông góc với mp(P) khi và chỉ khi a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong (P).

– Định lí ba đường vuông góc : Đường thẳng b nằm trên mp(P) vuông góc với đường thẳng a (a không vuông góc với (P)) khi và chỉ khi nó vuông góc với hình chiếu (vuông góc) của a trên (P).

– Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của đường thẳng đó trên mặt phẳng (nếu hình chiếu đó là một điểm thì xem góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng 90°).

4. – Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

– Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^{o}.

– Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

5. – Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (đường thẳng) là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng (đường thẳng).

– Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).

– Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

6. – Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là độ dài của đoạn vuông góc chung IJ, trong đó I, J là các giao điểm của đường vuông góc chung của a và b với a và b.

– Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

– Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

7. – Mặt phẳng đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB gọi là mặt phẳng trung trực của AB.

– Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

– Tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng đó được gọi là ***trục của tam giác*** ABC.

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện và A' là trọng tâm tam giác BCD. Các khẳng định sau đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ với M là một điểm tuỳ ý ;

c) $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$;

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AA'}$.

2. Trong không gian, hãy nêu cách chứng minh :

a) Đường thẳng vuông góc với đường thẳng ;

b) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ;

c) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

3. Hãy nêu cách tính :

a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng ;

b) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ;

c) Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nó ;

d) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song ;

e) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

III - Bài tập

1. Tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$ và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^{o}$, $\widehat{BOC} = 90^{o}$.

a) Chứng tỏ rằng ABC là tam giác vuông và $OA \perp BC$.

b) Tìm đường vuông góc chung IJ của OA và BC ; tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120^{o}$, $\widehat{BSC} = 60^{o}$, $\widehat{CSA} = 90^{o}$.

a) Chứng tỏ rằng ABC là tam giác vuông.

b) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD, đặt $CM = x$, $CN = y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để :

a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^{o} ;

b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

4. Tam giác ABC vuông có cạnh huyền BC nằm trong mp(P), cạnh AB và AC lần lượt tạo với mp(P) các góc β và γ. Gọi α là góc tạo bởi mp(P) và mp(ABC). Chứng minh rằng $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

5. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Tính diện tích các tam giác HAB, HBC và HCA.

6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh C, $CA = a$, $CB = b$; mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P). Thiết diện là hình gì ?

b) Tính diện tích thiết diện nói trên.

7. Một tứ diện được gọi là ***gần đều*** nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Với tứ diện $ABCD$, chứng tỏ các tính chất sau là tương đương ;

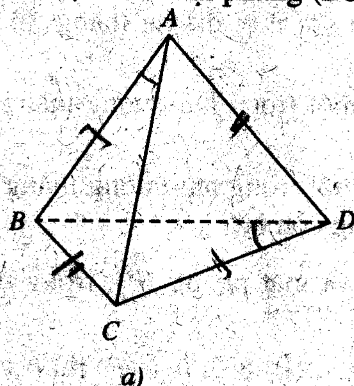
a) Tứ diện $ABCD$ là gần đều ;

b) Các đoạn thẳng nối trung điểm cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau ;

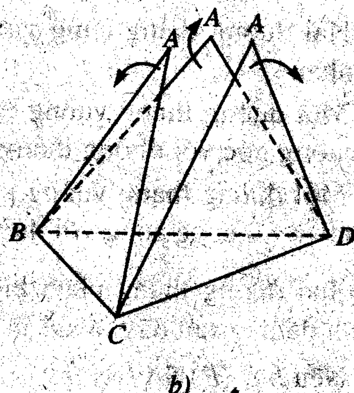
c) Các ***trọng tuyến*** (đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện) bằng nhau ;

d) Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng 180^o.

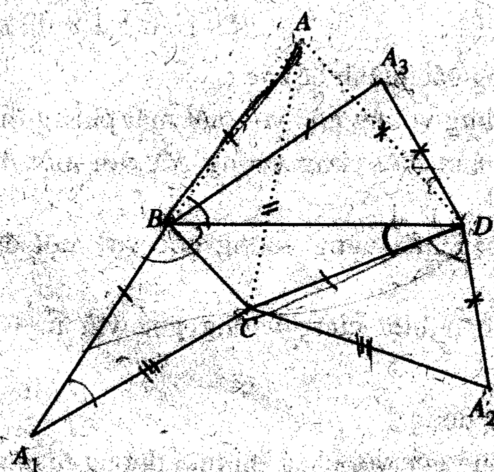
8. Cho tứ diện $ABCD$. Cắt tứ diện đó theo các cạnh AB, AC, AD và trải các mặt ABC, ACD, ADB lên mặt phẳng (BCD) (xem hình 133). Hình phẳng gồm các tam giác BCD, A_1BC, A_2CD, A_3BD gọi là ***hình khai triển*** của tứ diện $ABCD$ trên mặt phẳng (BCD).

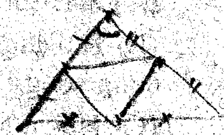


a)



b)





c)

Hình 133

a) Chứng tỏ hình khai triển của tứ diện gần đều $ABCD$ trên mp(BCD) làm thành một tam giác nhọn.

b) Dùng bìa cứng cắt và dán để có một tứ diện gần đều.

IV - Các câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

(A) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$; (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$; (D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

2. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau ;

(B) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau ;

(C) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia ;

(D) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

(A) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$; (B) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$;

(C) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$; (D) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

4. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song ;

(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song ;

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song ;

(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

5. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia ;

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau ;

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau ;

(D) Ba mệnh đề trên đều sai.

6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước ;

(B) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước ;

(C) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước ;

(D) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

7. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật ;

(B) Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật ;

(C) Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật ;

(D) Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương ;

(B) Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương ;

(C) Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương ;

(D) Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân ;

(B) $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân với đỉnh S ;

(C) $S.ABC$ là hình chóp đều nếu góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng chứa đáy bằng nhau ;

(D) $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên có diện tích bằng nhau.

10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia ;

(B) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia ;

(C) Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó ;

(D) Các mệnh đề trên đều sai.

11. Hình tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = AC = AD = 3$. Diện tích tam giác BCD bằng

(A) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$; (B) $\dfrac{9\sqrt{2}}{3}$; (C) 27 ; (D) $\dfrac{27}{2}$.

12. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^o$. Khi đó, khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện $A'ABD$ bằng :

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; (C) $a\sqrt{2}$; (D) $\dfrac{3a}{2}$.

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

1. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Xét bốn tam giác APN, PBM, NMC, MNP. Tìm phép dời hình biến tam giác APN lần lượt thành một trong ba tam giác còn lại.

b) Phép vị tự nào biến tam giác ABC thành tam giác MNP ?

c) Xét tam giác có ba đỉnh là *trực tâm* của ba tam giác APN, PBM và NCM. Chứng tỏ rằng tam giác đó bằng tam giác APN. Chứng minh điều đó cũng đúng nếu thay *trực tâm* bằng *trọng tâm*, hoặc *tâm đường tròn ngoại tiếp*, hoặc *tâm đường tròn nội tiếp*.

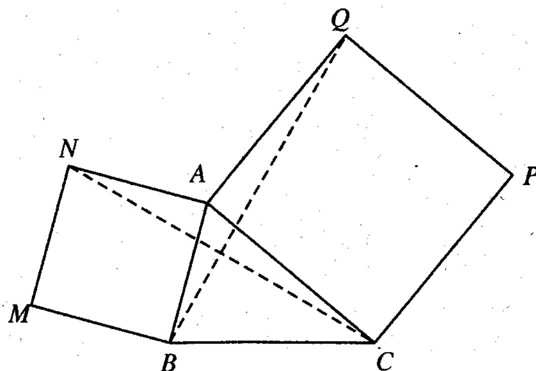
2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA. Kẻ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC.

a) Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến các đường thẳng MM', NN', PP', QQ' thành những đường thẳng nào ?

b) Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét gì về vị trí điểm đồng quy và hai điểm I, O ?

3. Cho tam giác ABC và hai hình vuông $ABMN$, $ACPQ$ như hình 134.

a) Xác định phép quay biến tam giác ABQ thành tam giác ANC.



Hình.134

b) Chứng tỏ rằng hai đoạn thẳng BQ, CN bằng nhau và vuông góc với nhau.

c) Gọi O, O' là tâm của các hình vuông, I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác OIO' là tam giác vuông cân.

4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD ; P là một điểm thay đổi trên đoạn thẳng AD.

a) Xác định giao điểm Q của mp(MNP) và cạnh AC. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ?

b) Tìm quỹ tích giao điểm I của QM và PN.

c) Tìm quỹ tích giao điểm J của QN và PM.

5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M nằm giữa A và D, điểm N nằm giữa C và C' sao cho $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NC'}$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mp(ACB').

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mp(ACB').

6. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Chứng minh rằng các tia phân giác ngoài của các góc xOy, yOz và zOx đồng phẳng.

7. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K và N lần lượt là trung điểm của SA và BC ; M là điểm nằm giữa S và C.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua K, song song với AB và SC thì đi qua điểm N.

b) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mp(KMN). Chứng tỏ rằng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mp($ABCD$).

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mp(SCD).

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P). Tính diện tích thiết diện.

e) Tính góc giữa đường thẳng AB và mp(P).

9. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Hai tia Bx và Cy cùng vuông góc với mp(ABC) và nằm về một phía đối với mặt phẳng đó. Trên Bx, Cy lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho $BB' = a$, $CC' = m$.

a) Với giá trị nào của m thì $AB'C'$ là tam giác vuông ?

b) Khi tam giác $AB'C'$ vuông tại B', kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng $B'C'H$ là tam giác vuông. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và ($AB'C'$).

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Chương I

1. d trùng d' khi d song song với giá của $\vec{u}$.

d song song với d' khi d không song song với giá của $\vec{u}$.

d không bao giờ cắt d'.

2. Lấy hai điểm A và A' lần lượt nằm trên a và a'. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến a thành a'.

4. Quỹ tích M' là ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

5. b) $d = d' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

c) F là phép dời hình.

d) Khi $\alpha = 0$, F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(a\,;\,b)$.

6. F_1 là phép dời hình.

7. a) Khi $d \,//\, a$.

b) Khi $d \perp a$ hoặc d trùng với a.

c) Khi d cắt a nhưng không vuông góc với a. Khi đó, giao điểm của d và d' nằm trên a.

d) Khi góc giữa d và a bằng 45^o.

8. Ảnh của $(\mathscr{C}_1)$ là đường tròn $(\mathscr{C}'_1)$:

$$x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

Ảnh của $(\mathscr{C}_2)$ chính là $(\mathscr{C}_2)$.

9. Gọi X là điểm đối xứng với A qua Ox, Y là điểm đối xứng với A qua Oy. Đoạn thẳng XY cắt Ox, Oy lần lượt tại B và C. Tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

11. b) Chú ý rằng nếu hàm số $y = f(x)$ chẵn thì $f(-x) = f(x)$.

13. Dùng phép quay tâm O với góc quay 90^o thì G biến thành G'.

16. a) Giao điểm của hai đường thẳng đó.

b) Những điểm cách đều hai đường thẳng đó.

c) Trung điểm đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn.

d) Trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm của elip.

e) Trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm của hypebol.

19. Phương trình của Δ' là :

$$ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

21. c) Có thể không bằng nhau.

23. Hãy chứng minh hai tam giác $O_1O_2O_3$ và $I_1I_2I_3$ bằng nhau.

24. Đường thẳng đi qua hai tâm của hai hình bình hành.

28. Dùng phép vị tự tâm A, tỉ số 2 để biến điểm M thành điểm N.

29. Dùng phép vị tự tâm I biến M thành N.

30. Đường thẳng BC đi qua tâm vị tự ngoài của (O) và (O').

Ôn tập chương I

1. Dùng phép đối xứng qua đường thẳng d.

2. Tâm đối xứng là giao điểm của hai trục đối xứng.

3. Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$.

5. M và M_3 đối xứng với nhau qua điểm I, trong đó $ABCI$ là hình bình hành.

6. F là phép tịnh tiến khi $k = 1$ và là phép vị tự khi $k \neq 1$.

9. Hãy tìm quỹ tích trung điểm của BC, từ đó suy ra quỹ tích G.

Các câu hỏi trắc nghiệm chương I

1. (D) ; **2.** (B) ; **3.** (C) ; **4.** (D) ; **5.** (B) ; **6.** (B) ; **7.** (D) ; **8.** (D) ; **9.** (D) ; **10.** (A) ; **11.** (C) ; **12.** (C).

Chương II

9. Sử dụng phương pháp phản chứng.

10. Hãy chứng minh giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a), (M, b) nằm trên mp(O, c).

11. a) Hãy chứng minh giao điểm I của CM và SO là giao điểm của mp(CMN) với SO.

b) Sử dụng kết quả câu a).

16. Gọi N là giao điểm của SM và CD ; O là giao điểm của AC và BN.

a) mp(SBM) $\cap$ mp(SAC) = SO ;

b) Giao điểm của BM với mp(SAC) là giao điểm của BM với SO ;

c) Sử dụng kết quả câu b).

19. a), b) : Sử dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

21. Gọi I là giao điểm của RQ với BD. Hãy chứng minh S là trọng tâm tam giác ABI.

22. a) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; A' là giao điểm của AG với BQ. Kẻ $PP' \parallel AA'$ ($P' \in BQ$). Hãy chứng minh A' là trọng tâm tam giác BCD. Từ đó suy ra b).

27. Thiết diện là hình thang có hai cạnh đáy song song với AB.

28. Thiết diện là một ngũ giác có một cạnh song song với BD và có hai cạnh song song với SA.

35. Gọi M_0, N_0 là hai điểm cố định lần lượt nằm trên (P) và (Q) ; I_0 là điểm thuộc đoạn M_0N_0 sao cho $\frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$. Tập hợp các điểm I là mặt phẳng (R) qua I_0 đồng thời song song với cả (P) và (Q).

37. b), c) Xét mặt phẳng ($ACC'A'$).

38. Sử dụng tính chất : Tổng bình phương các đường chéo của một hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh.

42. Hãy chứng minh các trung tuyến của tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của các trung tuyến của tam giác ABC.

47. Thực hiện phép chiếu song song lên mp($ABCD$) theo phương BC_1. Gọi B_1' là hình chiếu của B_1. Khi đó J là giao điểm của DB'_1 với AC. Trong mp($B_1B'_1D$), kẻ JI song song với B'_1B_1 ($I \in B_1D$). $\frac{ID}{IB_1} = \frac{1}{2}$.

Ôn tập chương II

3. Các hình a), b), d), f), g), h).

4. a) Hãy chứng minh DM và EN cắt nhau tại trung điểm I của AB.

b) Hãy chứng minh $M_1N_1 \parallel DF$.

c) Sử dụng a) và b).

5. b) Sử dụng phép chiếu song song lên mp($A_1B_1C_1$) theo phương AA_1.

c) Gọi L, L' lần lượt là trung điểm của AG, $A'G'$ và L_1 là giao điểm của LL' với A_1G_1. Sử dụng tính chất đường trung bình của hình thang để suy ra điều phải chứng minh.

7. Sử dụng định lí Ta-lét đảo.

8. a) Gọi M_0, N_0 lần lượt là hai điểm cố định thuộc các tia Ax và By sao cho $\frac{AM_0}{BN_0} = k$. Hãy chứng minh MN song song với mặt phẳng cố định chứa M_0N_0 và song song với AB.

b) Gọi O là điểm thuộc đoạn AB sao cho $\frac{OA}{OB} = k$; Ox', Oy' lần lượt là các tia song song với Ax và By. Tập hợp các điểm I là tia phân giác Ot của góc $x'Oy'$.

Các câu hỏi trắc nghiệm chương II

1. (B) ; **2.** (B) ; **3.** (B) ; **4.** (D) ; **5.** (C) ; **6.** (A) ; **7.** (B) ; **8.** (B) ; **9.** (C) ; **10.** (C) ; **11.** (D) ; **12.** (A).

Chương III

1. a), b) : Có.

2. b) Hệ thức

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \vec{0}$ (M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD). Từ đó $O \equiv M \equiv N$.

3. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Tính $\overrightarrow{GI}$ và $\overrightarrow{CG'}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

4. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ và chứng minh $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{8}(5\vec{a} - \vec{c})$.

5. b) Từ $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với $x + y + z = 1$, suy ra $x = 1 - y - z$, từ đó đi đến $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$.

6. Sử dụng kết quả bài tập 5.

8. a) Chứng minh bằng phản chứng.

b) Giả sử ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng vuông góc với $\vec{n}$. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ không đồng phẳng, từ đó $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{n}$. Từ $\vec{a}.\vec{n} = \vec{b}.\vec{n} = \vec{c}.\vec{n} = 0$ suy ra $z = 0$.

9. Viết $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{SA} = (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}).\overrightarrow{SA}$ và sử dụng $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = \widehat{ASC}$.

10. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp DB$.

11. b) Có $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}$.

13. a) Đúng ; b), c) Sai.

16. Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^{\circ}$.

17. a) Chứng minh :

$$BC^2 < AB^2 + AC^2,$$
$$AC^2 < AB^2 + BC^2,$$
$$AB^2 < AC^2 + BC^2.$$

b) Dùng định lí ba đường vuông góc.

c) Sử dụng công thức tính đường cao ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông.

19. a) Kẻ $SH \perp mp(ABC)$. Do $SA = SB = SC$ và ABC là tam giác đều nên H trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Kẻ $AC_1 \perp SC$ thì (P) chính là $mp(ABC_1)$. Vì SAC là tam giác cân, mà $AC_1 \perp SC$ nên C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^{\circ}$ hay $a^2 < 2b^2$.

$$S_{ABC_1} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}.$$

20. b) i) $\Leftrightarrow$ iii) : $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = 0$. Tương tự ta có đpcm.

c) Chứng minh ba đường cao của tứ diện đôi một cắt nhau và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

21. a), b), c), f) : Sai.

d), e), g) : Đúng.

22. Sử dụng

$$AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

để đi đến $AC' = A'C = BD' = B'D$.

23. a) Chứng minh $AC' \perp BD$ và $AC' \perp BA'$.

b) Cạnh của thiết diện bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích thiết diện bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

24. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $OO_1 \perp SC$ thì $SC \perp mp(BO_1D)$. Hãy chứng minh $\widehat{BO_1D} > 90^{\circ}$ và quy bài toán về xác định x để $\widehat{BO_1D} = 120^{\circ}$.

Đáp số : $x = a$.

25. Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ $IJ \perp CD$ thì thiết diện là tam giác vuông AIJ.

$$S_{AIJ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

26. a) Hình hộp chữ nhật.

b) Hình hộp thoi.

c) Hình lập phương.

27. a) $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$, $(a > x > 0)$;

$$IJ = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}.$$

b) $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

28. b) Bằng cách xét mp(P) đi qua A sao cho B, C nằm về cùng một phía đối với (P), sau đó gọi D là giao điểm của (P) với đường thẳng BC và sử dụng kết quả của câu a) để đi đến điều phải chứng minh.

29. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB, CD thì $IJ \perp AB$, $IJ \perp CD$. Khi đó

$$IJ = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (c^2 + c'^2)} \text{ với } 4a^2 > c^2 + c'^2.$$

30. a) $AH = \dfrac{a}{2}$.

b) Kẻ đường cao HK của tam giác vuông AHA' thì HK là đường vuông góc chung của AA' và $B'C'$. Tính được $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

31. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

32. a) Xét $DACD'$ là tứ diện có DA, DC, DD' đôi một vuông góc ; từ đó tính được

$$d(D\,;(ACD')) = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

b) Chứng minh $AC' \perp CD'$. Đường vuông góc chung của AC' và CD' là IJ, ở đó I là trung điểm của CD' và J là chân đường vuông góc kẻ từ I xuống AC'. Ta tính được $IJ = \dfrac{a}{2}$.

33. Chứng minh $A'ABD$ là tứ diện đều và suy ra khoảng cách phải tính là $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

34. a) $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) $d(EF\,;SK) = d(H\,;(SAD)) = HJ$ (HJ là đường cao của tam giác vuông SHI với I là trung điểm của AD) và $HJ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

35. a) Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD. Sử dụng tính chất : Trong tam giác cân thì đường trung tuyến vẽ từ đỉnh cũng là đường cao của tam giác.

b) Từ $AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \dfrac{CD^2}{2}$,

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{CD^2}{2}$$

suy ra $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$.

Hệ thức $CB^2 + CA^2 = DB^2 + DA^2$ cũng được suy ra tương tự như trên và từ đó đi đến điều phải chứng minh.

Ôn tập chương III

2. a) $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại C.

b) $\dfrac{a}{2}$.

3. a) $2a^2 + xy = 2a(x + y)$.

b) $ay = x(a - x)$.

4. $\beta = \widehat{ABA'}$, $\gamma = \widehat{ACA'}$, $\alpha = \widehat{AHA'}$ ($AA' \perp (P)$, $AH \perp BC$) và dùng công thức

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

5. $$S_{HAB} = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}},$$

$$S_{HBC} = \frac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}},$$

$$S_{HCA} = \frac{c^2a^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

6. a) Thiết diện là tam giác vuông CHK, ở đó $CH \perp AB$, $HK \perp AB'$.

b) $S_{HCK} = \dfrac{a^3b\sqrt{2}}{2(a^2+b^2)}$.

7. a) ⇔ d) • Sử dụng tính chất bằng nhau của hai tam giác và tổng các góc trong của một tam giác bằng 180^o.

• Trải các mặt ABC, ACD, ADB lên mp(BCD) và khẳng định hình khai triển của tứ diện $ABCD$ trên mp(BCD) là tam giác nhận BC, CD, DB là ba đường trung bình của tam giác đó và từ đó suy ra điều phải chứng minh.

8. Theo kết quả bài 7, hình khai triển của tứ diện $ABCD$ trên mặt phẳng (BCD) là tam giác $A_1A_2A_3$ trong đó BC, CD, DB là ba đường trung bình của tam giác này. Chứng minh tứ diện $AA_1A_2A_3$ có AA_1, AA_2, AA_3 đôi một vuông góc, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Các câu hỏi trắc nghiệm chương III

1. (C) ; **2.** (C) ; **3.** (D) ; **4.** (C) ; **5.** (D) ; **6.** (D) ; **7.** (D) ; **8.** (B) ; **9.** (B) ; **10.** (B) ; **11.** (A) ; **12.** (A).

Ôn tập cuối năm

1. b) Phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$ (G là trọng tâm của tam giác ABC).

2. a) Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến : đường thẳng MM' thành đường thẳng PO, đường thẳng NN' thành đường thẳng QO, đường thẳng PP' thành đường thẳng MO, đường thẳng QQ' thành đường thẳng NO.

3. a) Phép quay tâm A, góc quay $\varphi = -90^o$.

5. a) Sử dụng định lí Ta-lét đảo.

7. b) Trường hợp M không là trung điểm của SC thì thiết diện là $MKPN$, trong đó $P = QN \cap AB$, $Q = MK \cap AC$. Do

$$S_{KMN} = S_{PKN}$$

$\Leftrightarrow OM = OP$ ($O = MP \cap KN$)

$\Leftrightarrow d(M ; (\alpha)) = d(P ; (\alpha))$ ((α) là mặt phẳng qua K, song song với AB và SC), và do

$$d(M ; (\alpha)) = d(S ; (\alpha)),$$
$$d(P ; (\alpha)) = d(A ; (\alpha)),$$
$$d(S ; (\alpha)) = d(A ; (\alpha)),$$

nên suy ra kết luận của bài toán.

8. a) $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

b) $d(AB ; (SCD)) = d(E ; (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$

(E là trung điểm của AB).

c) $d(AB ; SC) = d(AB ; (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

d) Thiết diện là $AB_1C_1D_1$ trong đó C_1 là trung điểm của SC, $B_1D_1 \parallel BD$, B_1D_1 đi qua giao điểm của AC_1 và SH.

$$S_{AB_1C_1D_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

e) Kẻ $HI \parallel SC$, lấy điểm J sao cho $BHIJ$ là hình bình hành. Khi đó $BJ \perp (P)$ nên $\widehat{BAJ}$ là góc giữa AB và (P).

$$\sin\widehat{BAJ} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

9. a) $m = 2a$; $m = 0$.

b) Chứng tỏ $B'H^2 = \dfrac{5a^2}{4}$, $C'H^2 = \dfrac{25a^2}{4}$, $B'C'^2 = 5a^2$, từ đó $B'C'H$ là tam giác vuông tại B'.

Từ hệ thức $S_{AIC} = S_{AIC'}.\cos\varphi$ (với I là giao điểm của $B'C'$ và BC, φ là góc giữa mp(ABC) và mp($AB'C'$)), ta có $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

BẢNG THUẬT NGỮ

L

M

P

Q

T

V

MỤC LỤC